ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФАРМАЦЕВТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА»

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
М. Б. Зверева,
Ф. О. Найдюк,
С. А. Шабров

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Утверждено научно-методическим советом фармацевтического факультета 21 января 2009 г., протокол № 1500-01

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета Л. В. Стенюхин

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 1 курса заочного отделения фармацевтического факультета Воронежского государственного университета, изучающих дисциплину «Математика».

Для специальности 060108 – Фармация

Методические рекомендации и контрольные задания по курсу «Математика» составлены для студентов 1 курса заочного отделения фармацевтического факультета Воронежского Государственного университета в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 060108 — Фармация (квалификация — провизор), учебным планом и программой курса.

В методических рекомендациях изложены понятия, которые позволят самостоятельно освоить разделы математики, необходимые для успешного выполнения контрольных работ № 1 и № 2; включены варианты контрольных работ, требования к их содержанию и оформлению.

Цели и задачи дисциплины

Главной целью преподавания дисциплины «Математика» для студентов фармацевтического факультета Воронежского государственного университета является обучение студентов-провизоров основам современного математического аппарата как средства решения теоретических и практических задач фармации, биологии, физики и химии.

Для достижения поставленной цели в процессе обучения студентов необходима реализация определённых задач.

Математическая подготовка студента нацелена на развитие и формирование логического мышления, умения точно формулировать задачу и использовать полученные знания при изучении физики, химии и других дисциплин. Преподавание математики призвано способствовать повышению теоретического уровня студентов, формированию у них научного мировоззрения.

При разработке программы сделан акцент на более углубленное изучение таких важных разделов курса, как решение дифференциальных уравнений и др. При изложении лекционного курса основной акцент делается на разъяснение смысла формулировок и понятий, иллюстрацию их примерами профессионального характера, различными моделями. На практических занятиях основное внимание уделено выработке у студентов логического и аналитического мышления, формированию вычислительных навыков, умению проводить приближенные расчеты.

Знания и умения, приобретаемые студентами при изучении курса «Математика»

Преподавание курса математики на фармацевтическом факультете основывается на знаниях, приобретенных при изучении школьных курсов по математике.

В итоге обучения курсу студент должен знать наиболее общие законы математики и закономерности, лежащие в основе статистических процессов.

Студент должен уметь:

— производить основные математические расчеты;

— моделировать ситуационные медико-биологические задачи и решать их с использованием понятий дифференциального и интегрального исчислений;

— обрабатывать результаты статистических измерений.

УЧЕБНЫЙ ПЛАН

В соответствии с учебным планом на заочном отделении предмет «Математика» преподаётся на первом курсе. На изучение дисциплины отводится всего 126 часов, из них 12 часов лекций, 12 часов практических занятий и 102 часа самостоятельной работы, во время которой студенты выполняют 2 контрольные работы. По завершении курса студенты сдают экзамен.

Программа курса по математике

1. *Производная и дифференциал функции*

Понятие предела функции, понятие бесконечно малой величины. Непрерывность функции. Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции. Геометрический и механический смысл первой производной. Производные основных элементарных функций. Основные формулы дифференцирования. Производная сложной функции. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциал функции. Аналитический и геометрический смысл дифференциала.

2. *Применение производных к исследованию функций*

Возрастание и убывание функции. Достаточные условия возрастания и убывания функции на интервале. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции. Нахождение экстремумов функции с использованием первой производной. Выпуклость функции. Точки перегиба. Достаточные условия выпуклости функции.

3. *Функции двух переменных*

Полное и частные приращения функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных. Понятие градиента. Полный дифференциал. Применение полного дифференциала для приближенных вычислений.

4. *Неопределенный интеграл*

Первообразная функции и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Основные способы интегрирования: метод разложения, метод подстановки, метод интегрирования по частям.

5. *Определенный интеграл*

Понятие определенного интеграла и его геометрический смысл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона — Лейбница. Несобственные интегралы. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур и работы переменной силы. Понятие о численном интегрировании.

6. *Дифференциальные уравнения*

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Порядок уравнения. Общее и частные решения дифференциального уравнения. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными. Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, их решение.

Составление и решение дифференциальных уравнений при решении задач физико-химического и медико-биологического содержания.

7. *Случайные события*

Случайные события и их классификация. Полная группа событий. Классическое и статистическое определения вероятности. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий. Теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий. Формула полной вероятности. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли, закон Пуассона.

8. *Случайные величины*

Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины, многоугольник распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины, их свойства. Распределение Бернулли, распределение Пуассона. Функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, их свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило «трех сигм».

Основные предельные теоремы теории вероятностей.

9. *Задачи математической статистики*

Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативность выборки. Статистическое распределение выборки, дискретные и интервальные вариационные ряды. Полигон. Гистограмма. Эмпирическая функция распределения вероятностей.

10. *Оценки характеристик распределения по данным выборки*

Точечные оценки параметров распределения. Генеральная средняя и выборочная средняя. Генеральная дисперсия. Несмещенная и смещенная оценки генеральной дисперсии: выборочная и исправленная выборочная дисперсии.

Доверительный интервал и доверительная вероятность. Нахождение границ доверительного интервала для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины по данным выборки малого объема. Распределение Стьюдента. Погрешности измерений и их оценки.

11. *Метод наименьших квадратов*

Основная идея метода. Расчет параметров линейной аппроксимации экспериментальных зависимостей между величинами.

12. *Элементы корреляционного анализа*

Статистическая, корреляционная и функциональная зависимости. Линии регрессии. Линейная корреляционная зависимость. Уравнения линейной регрессии, коэффициенты регрессии. Коэффициент линейной корреляции, его свойства. Расчет выборочного коэффициента линейной корреляции. Понятие о множественной корреляции.

13. *Статистическая проверка статистических гипотез*

Нулевая и конкурирующая гипотезы. Статистические критерии. Уровень значимости. Проверка существенности линейной корреляционной связи между величинами.

Сравнение средних значений двух нормально распределенных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы по результатам малых независимых выборок.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных генеральных совокупностей по их оценкам. Критерий Фишера – Снедекора. Непараметрические критерии (критерий знаков).

Проверка гипотез о законах распределения генеральных совокупностей. Критерий Пирсона.

14. *Однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ*

Факторная и остаточная дисперсии. Сравнение нескольких средних методом однофакторного дисперсионного анализа. Понятие о двухфакторном и многофакторном дисперсионном анализе.

15. *Дискретные и непрерывные временные ряды, их характеристики*

Оценки математического ожидания и дисперсии временного ряда. Уравнение тренда. Сглаживание временных рядов: метод скользящего среднего, экспоненциальное сглаживание. Нахождение линейного уравнения тренда методом наименьших квадратов.

Тематический план лекций по математике

1	Производная функции. Геометрический и механический смысл производной. Дифференциал функции. Производные высших порядков. Исследование функций с помощью производных	(2 ч)
2	Функции двух переменных. Частные производные. Частный и полный дифференциал функции. Понятие градиента функции. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Основные способы интегрирования. Определенный интеграл и его вычисление. Основные приложения определенного интеграла	(2 ч)
3	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и их решение. Составление и решение дифференциальных уравнений в задачах физики, химии и биологии	(2 ч)

4	Случайные события и их классификация. Классическое и статистическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Теоремы теории вероятностей. Повторные испытания. Формула Бернулли, формула Пуассона. Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Функция распределения дискретной случайной величины	(2 ч)
5	Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей, их свойства. Равномерный закон распределения. Нормальный закон распределения. Распределения Стьюдента, Пирсона, Фишера – Снедекора	(2 ч)
6	Генеральная и выборочная совокупности. Дискретный и интервальный вариационные ряды. Полигон, гистограмма. Точечные и интервальные оценки параметров распределения по данным выборки. Доверительный интервал, доверительная вероятность. Оценка случайных погрешностей прямых и косвенных измерений. Проверка гипотез. Критерий Пирсона. Дисперсионный анализ. Временные ряды	(2 ч)

Тематический план практических занятий по математике

1	Пределы функций и их вычисление. Производная функции одной переменной. Производная сложной функции. Производные высших порядков. Исследование функций с помощью производных	(2 ч)
2	Функции двух переменных. Частные производные, частный и полный дифференциалы. Неопределенный интеграл. Интегрирование методом разложения. Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной и интегрирования по частям	(2 ч)
3	Определенный интеграл. Методы вычисления определенных интегралов. Практическое приложение определенных интегралов. Вычисление площадей фигур на плоскости	(2 ч)

4	Решение дифференциальных уравнений первого порядка. Применение дифференциальных уравнений для решения прикладных задач	(2 ч)
5	Вычисление вероятностей случайных событий. Теоремы теории вероятностей	(2 ч)
6	Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины. Нормальный закон распределения. Вычисление вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал	(2 ч)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Морозов Ю. В. Основы высшей математики и статистики / Ю. В. Морозов. — М. : Медицина, 2001. — 232 с.

2. Павлушков И. В. Основы высшей математики и математической статистики : учеб. для мед. и фарм. вузов / И. В. Павлушков. — М. : ГЭОТАР-МЕД, 2003. — 424 с.

Дополнительная литература

3. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1986. — 575 с.

4. Баврин И. И. Краткий курс высшей математики : учеб. для студентов хим.-биол. специальностей пед. вузов / И. И. Баврин. — М. : Физматлит, 2003. — 326 с.

5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис Пресс, 2002. — 430 с.

6. Математика : учеб.-метод. пособие : специальность 060108 (040500) — Фармация / сост. С. А. Шабров. — Воронеж : ЛОП ВГУ, 2005. — Ч. 1. — 22 с.

7. Математика : учеб.-метод. пособие : специальность 060108 (040500) — Фармация / сост. С. А. Шабров. — Воронеж : ЛОП ВГУ, 2005. — Ч. 2 : Дифференциальные уравнения. — 19 с.

8. Математика : учеб.-метод. пособие : специальность 060108 (040500) — Фармация / сост. С. А. Шабров. — Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006. — Ч. 3 : Теория вероятностей. — 39 с.

9. Математика : учеб.-метод. пособие : специальность 060108 (040500) — Фармация / сост. С. А. Шабров. — Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006. — Ч. 4 : Случайные величины. — 51 с.

Правила выполнения и оформления контрольных работ

В результате самостоятельного изучения курса «Математика» каждый студент должен выполнить две контрольные работы и представить их на кафедру математического анализа за 10 дней до экзамена. Контрольные работы позволяют оценить степень усвоения студентом учебного материала в результате самостоятельной работы с учебной литературой и его способности к решению математических задач.

При выполнении контрольных работ студент должен придерживаться следующих требований:

— работа должна быть выполнена в тетради. На обложке следует указать Ф. И. О. студента, номер варианта контрольной работы, номер зачётной книжки студента и т. п. (см. приложение). Вариант контрольной работы, если не оговорено особо, выбирается в соответствии с последней цифрой номера зачётной книжки, при этом цифре 0 соответствует десятый вариант работы (см. номера заданий по вариантам на с. 72);

— перед началом решения задачи необходимо написать полный текст условия задачи;

— работа должна быть написана самим студентом от руки, работы, распечатанные на принтере или ксероксе, рассматриваться не будут;

— работа должна быть выполнена аккуратно, почерк не должен вызывать затруднений при чтении работы, для возможных замечаний преподавателя в тетради нужно оставить поля;

— работа должна быть структурирована и разделена на отдельные задания, решение задачи следует снабжать подробными пояснениями, расчёты по формулам должны быть приведены полностью, без сокращений;

— таблицы, рисунки и схемы должны иметь соответствующие подписи;

— в конце приведенного решения задачи необходимо указывать литературу, использованную при её решении;

— в конце работы указать дату выполнения и поставить свою подпись.

На контрольные работы преподаватель даёт краткую рецензию с указанием недочётов и обнаруженных ошибок, если они имеются. В случае неудовлетворительной оценки контрольные работы возвращаются студенту для доработки, после чего повторно представляются на проверку.

Студенты, не выполнившие контрольные работы или получившие за них неудовлетворительную оценку, не допускаются к экзамену.

При возникновении вопросов по выполнению контрольных работ студенты могут обращаться за консультацией на кафедру математического анализа ВГУ (тел. 8(4732)-208-690).

Пример решения контрольной работы № 1

Пример 1. Вычислить пределы.
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-\sqrt{1-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{5x^2+x}$.

Решение. а) В пределе неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы избавиться от неопределенности, числитель и знаменатель умножим на $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\times$ $\times\left(1+\sqrt{1-x}\right)$. Будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{(1-\sqrt{1-x})\cdot(1+\sqrt{1-x})\cdot\left(1+\sqrt{1+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{((\sqrt{1+x})^2-1^2)\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{(1^2-(\sqrt{1-x})^2)\cdot\left(1+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot\left(1+\sqrt{1+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1+x}}.$$

В последнем пределе неопределенности нет. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{1+\sqrt{1-0}}{1+\sqrt{1+0}}=1.$$

б) В пределе — неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т. е. x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{5x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{5+\dfrac{1}{x}}=\frac{2-0}{5+0}=\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Найти производные первого порядка от следующих функций:

а) $y = \sin^2(\ln x)$; б) $y = e^{\cos(x^2)}$.

Решение. а) По правилу дифференцирования сложной функции $\big(h\,(f(x))\big)' = h'(f(x)) \cdot f'(x)$ имеем

$$y' = (\sin^2(\ln x))' = 2\sin(\ln x) \cdot (\sin(\ln x))' =$$
$$= 2\sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x) \cdot (\ln x)' = \sin(2\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(2\ln x)}{x}.$$

(Здесь мы воспользовались формулой $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$.)

б) По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = \left(e^{\cos(x^2)}\right)' = e^{\cos(x^2)} \cdot \left(\cos\left(x^2\right)\right)' = e^{\cos(x^2)} \cdot \left(-\sin x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' =$$
$$= e^{\cos(x^2)} \cdot (-\sin x^2) \cdot (2x) = -2x \cdot \sin x^2 \cdot e^{\cos(x^2)}.$$

Пример 3. Найти производные первого и второго порядка от следующих функций:

а) $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$; б) $y = \sin(x^5)$.

Решение. а) Найдем первую производную. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{4+x^2}}\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)' =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{4+x^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{4+x^2}}\left(x^2+4\right)'\right) =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{4+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}\right) = \frac{x + \sqrt{4+x^2}}{(x + \sqrt{4+x^2})\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Вторая производная равна

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)' = \left(\left(4+x^2\right)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(4+x^2)^{-3/2}\left(4+x^2\right)' =$$
$$= -\frac{1}{2}(4+x^2)^{-3/2}2x = -\frac{x}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

б) По правилу дифференцирования сложной функции первая производная равна

$$y' = \left(\sin\left(x^5\right)\right)' = \cos\left(x^5\right)\left(x^5\right)' = \cos\left(x^5\right)\left(5x^4\right) = 5x^4\cos(x^5).$$

Вторая производная равна

$$y'' = (y')' = \left(5x^4\cos\left(x^5\right)\right)' = \left(5x^4\right)'\cos\left(x^5\right) + 5x^4\left(\cos\left(x^5\right)\right)' =$$
$$= 20x^3\cos\left(x^5\right) + 5x^4\left(-\sin\left(x^5\right)\right)\left(x^5\right)' = 20x^3\cos\left(x^5\right) - 25x^8\sin\left(x^5\right).$$

Пример 4. Найти частные производные первого порядка от следующих функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{3x-2y}{1+6xy}$; б) $z = e^{x^2y^3}$.

Решение. а) По правилам дифференцирования имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\frac{3x-2y}{1+6xy}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{3x-2y}{1+6xy}\right)^2}\left(\frac{3x-2y}{1+6xy}\right)'_x =$$

$$= \frac{(1+6xy)^2}{(1+6xy)^2+(3x-2y)^2}\cdot\frac{(3x-2y)'_x(1+6xy)-(3x-2y)(1+6xy)'_x}{(1+6xy)^2} =$$

$$= \frac{(1+6xy)^2}{(1+6xy)^2+(3x-2y)^2}\cdot\frac{3(1+6xy)-(3x-2y)6y}{(1+6xy)^2} =$$

$$= \frac{3(1+4y^2)}{1+12xy+36x^2y^2+9x^2-12xy+4y^2} =$$

$$= \frac{3(1+4y^2)}{(1+4y^2)(1+9x^2)} = \frac{3}{1+9x^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\operatorname{arctg}\frac{3x-2y}{1+6xy}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{3x-2y}{1+6xy}\right)^2}\left(\frac{3x-2y}{1+6xy}\right)'_y =$$

$$= \frac{(1+6xy)^2}{(1+6xy)^2+(3x-2y)^2}\cdot\frac{(3x-2y)'_y(1+6xy)-(3x-2y)(1+6xy)'_y}{(1+6xy)^2} =$$

$$= \frac{(1+6xy)^2}{(1+6xy)^2+(3x-2y)^2}\cdot\frac{(-2)(1+6xy)-(3x-2y)6x}{(1+6xy)^2} =$$

$$= -\frac{2(1+9x^2)}{(1+4y^2)(1+9x^2)} = -\frac{2}{1+4y^2}.$$

б) Находим частные производные первого порядка второй функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x^2y^3}\right)'_x = e^{x^2y^3}\left(x^2y^3\right)'_x = 2xy^3e^{x^2y^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{x^2y^3}\right)'_y = e^{x^2y^3}\left(x^2y^3\right)'_y = 3x^2y^2e^{x^2y^3}.$$

Пример 5. Найти неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$; б) $\displaystyle\int e^x\cos 3x\,dx$.

Решение. а) Сделаем замену $y = x^3$. Тогда $dy = \big(x^3\big)'\,dx = 3x^2\,dx$. Отсюда $x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\,dy$, следовательно,

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \int \frac{1}{3}e^y\,dy = \frac{1}{3}\int e^y\,dy = \frac{1}{3}e^y + C,$$

где C — произвольная постоянная. Возвращаясь к исходной переменной, будем иметь

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C,$$

здесь C — произвольная постоянная.

б) Проинтегрируем интеграл $\displaystyle\int e^x \cos 3x\,dx$ по частям, воспользовавшись формулой

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Возьмем $u = e^x$ и $dv = \cos 3x\,dx$. Тогда $du = e^x\,dx$ и $v = \dfrac{1}{3}\sin 3x$. Отсюда

$$\int e^x \cos 3x\,dx = e^x \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 3x - \int e^x \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 3x\,dx,$$

или

$$\int e^x \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^x \sin 3x - \frac{1}{3}\int e^x \sin 3x\,dx. \tag{$*$}$$

Полученный интеграл $\displaystyle\int e^x \sin 3x\,dx$ интегрируем по частям, положив при этом $u = e^x$, $dv = \sin 3x\,dx$. Отсюда $du = e^x\,dx$, $v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x$. Следовательно,

$$\int e^x \sin 3x\,dx = e^x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)e^x\,dx = \\ = -\frac{1}{3}e^x \cos 3x + \frac{1}{3}\int e^x \cos 3x\,dx.$$

Подставляя в равенство $(*)$ вместо интеграла $\displaystyle\int e^x \sin 3x\,dx$ последнее выражение, получим

$$\int e^x \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^x \sin 3x - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^x \cos 3x + \frac{1}{3}\int e^x \cos 3x\,dx\right).$$

Откуда

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)\int e^x \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^x \sin 3x + \frac{1}{9}e^x \cos 3x.$$

Окончательно находим

$$\int e^x \cos 3x\,dx = \frac{3}{10}e^x \sin 3x + \frac{1}{10}e^x \cos 3x + C,$$

здесь C — произвольная постоянная.

Пример 6. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 3x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\cos 3x\,dx$.

Решение. а) Используя формулу понижения степени $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, будем иметь

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 3x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 6x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 6x\,dx.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства табличный; для нахождения второго сделаем замену $y = 6x$. Так как производная функции $f(x) = 6x$ положительна ($f'(x) = 6$), то предлагаемая замена допустима. Имеем $dy = 6\,dx$, отсюда $dx = \dfrac{1}{6}\,dy$. Пределы интегрирования: $x = 0 \to y = 0$ и $x = \pi/2 \to y = 3\pi$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos 6x\,dx = \int\limits_0^{3\pi} \cos y \frac{1}{6}\,dy = \frac{1}{6}\sin y\Big|_{y=0}^{y=3\pi} = \frac{1}{6}\sin 3\pi - \frac{1}{6}\sin 0 = 0.$$

Окончательно находим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\,x\,\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

б) Проинтегрируем по частям, взяв $u = x$ и $dv = \cos 3x\,dx$. Имеем $du = dx$ и $v = \dfrac{1}{3}\sin 3x$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos 3x\,dx = x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin 3x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sin 3\pi - \frac{0}{3}\sin 0 - \frac{1}{3}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{9}\left(\cos 3\pi - \cos 0\right) = -\frac{2}{9}.$$

Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями: $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = -x$ и $x = 2{,}5$.

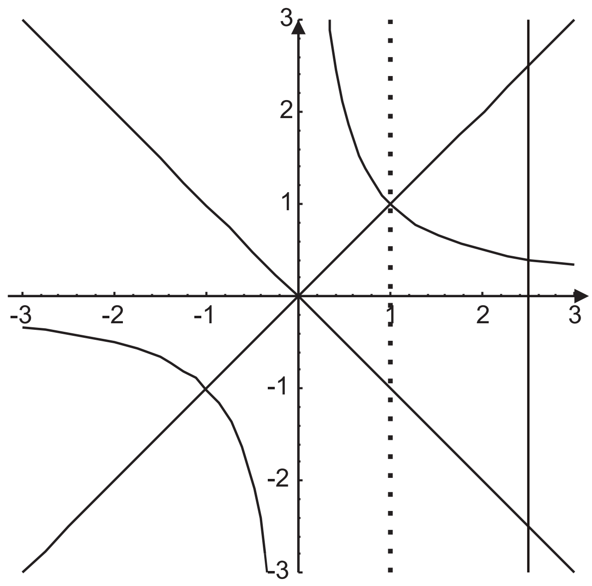

Рис. 1. Фигура

Решение. В плоскости Oxy построим схематически графики данных линий. Из графика видно, что снизу фигура ограничена графиком функции $y = -x$, а сверху — $y = x$, если x принадлежит отрезку $[0;1]$, и $y = \dfrac{1}{x}$, если x изменяется в пределах от 1 до 2,5. Тогда

$$S = \int\limits_0^1 (x - (-x))\, dx +$$

$$+ \int\limits_1^{2,5} \left(\frac{1}{x} - (-x)\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 2x\, dx + \int\limits_1^{2,5} \frac{1}{x}\, dx + \int\limits_1^{2,5} x\, dx = 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \ln|x|\Bigg|_{x=1}^{2,5} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=1}^{2,5} =$$

$$= 1 + \ln 2{,}5 + \frac{(2{,}5)^2}{2} - \frac{1}{2} = 3{,}625 + \ln 2{,}5.$$

Пример 8. Провести полное исследование функции $y = x - 1 - \dfrac{2}{x}$ и построить ее график.

Решение. Область определения: $D(f) = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

Функция не является ни чётной, ни нечётной, так как

$$y(-x) = (-x) - 1 - \frac{2}{(-x)} = -x - 1 + \frac{2}{x} \neq y(x) \text{ и } \neq -y(x).$$

Функция не является периодической: $y(x + T) \neq y(x)$ ни при каком $T > 0$.

Точек пересечения с осью Oy нет, так как $x = 0$ не входит в $D(f)$. Для того чтобы найти точки пересечения с осью Ox, необходимо решить уравнение: $y(x) = 0$, или $\dfrac{x^2 - x - 2}{x} = 0$. Корни последнего уравнения: $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Поэтому $(-1, 0)$ и $(2, 0)$ — точки пересечения с осью Ox. Исследуем знак функции $y(x)$. Для этого сделаем чертеж:

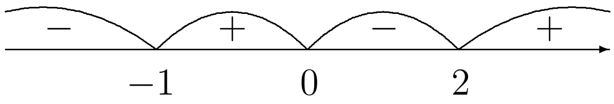

Рис. 2. Знак функции

Из чертежа видно, что на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 2)$ функция отрицательна, на интервалах $(-1, 0)$ и $(2, +\infty)$ — положительна.

Для нахождения точек экстремума и промежутков монотонности находим производную:

$$y'(x) = \left(x - 1 - \frac{2}{x}\right)' = 1 + \frac{2}{x^2} > 0.$$

Так как производная положительна, то критических точек нет и функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Изучение выпуклости функции. Вторая производная: $y'' = (y')' = -\dfrac{4}{x^3}$. Ее знак:

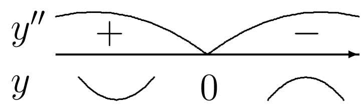

Рис. 3. Знак второй производной

Из рисунка видно, что на интервале $(-\infty, 0)$ функция выпукла вниз, на интервале $(0, +\infty)$ — выпукла вверх. А так как в точке $x = 0$ функция неопределена, то точек перегиба нет.

Находим асимптоты. Так как $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \infty$, то $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Находим наклонные и горизонтальные асимптоты. Имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 1 - \dfrac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(x - 1 - \frac{2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(-1 - \frac{2}{x}\right) = -1,$$

следовательно, $y = x - 1$ — наклонная асимптота. Так как $k \neq 0$, то горизонтальных асимптот нет.

График функции, с учетом проведенных исследований, представлен на рис. 4.

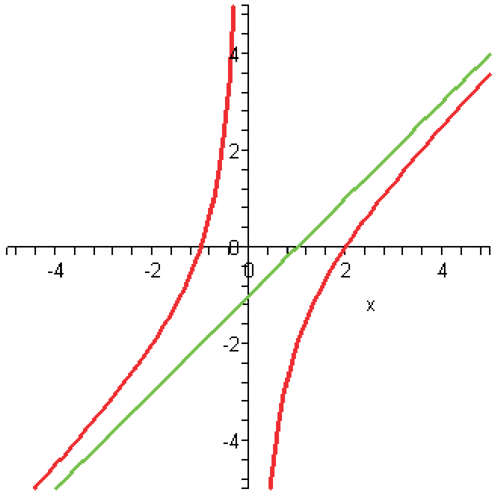

Рис. 4. График функции $y = x - 1 - \frac{2}{x}$.

Пример 9. Решить уравнения с разделяющимися переменными:
а) $xy' = -y$; б) $y' = \sqrt{2x - 10y - 3}$.

Решение. а) Заменяя y' на $\dfrac{dy}{dx}$, будем иметь

$$x\frac{dy}{dx} = -y, \quad \text{или} \quad x\,dy = -y\,dx.$$

Разделим обе части последнего равенства на $x{\cdot}y$. Однако при делении могут быть потеряны решения $x = 0$ и $y = 0$. Для того чтобы подтвердить или опровергнуть возможную потерю решений, выполним проверку.

1. Подставим в исходное уравнение $x = 0$: $0 \cdot y' = -y$. Но y, вообще говоря, не равен нулю. Поэтому $x = 0$ не является решением.

2. $y = 0$. Тогда $y' = 0$, и мы имеем равенство $x \cdot 0 = 0$, справедливое при всех x, следовательно, $y = 0$ — решение исходного уравнения.

После деления уравнения $x\,dy = -y\,dx$ на $x \cdot y$ получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Переменные разделились, что позволяет нам проинтегрировать обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Последнее равенство можно записать в виде $|y| = \dfrac{C_2}{|x|}$, где $C_2 = e^{C_1}$, и окончательно $y = \dfrac{C}{x}$, где $C = \pm C_2$, причем знак выбираем в зависимости от знаков x и y.

Таким образом, $y = \dfrac{C}{x}$ и $y = 0$.

Заметим, что если разрешить константе C принимать значение нуль, то $y = \dfrac{C}{x}$ — общее решение уравнения.

б) Сделаем замену $z = 2x - 10y - 3$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y = \dfrac{2x - 3 - z}{10}$ и $y' = \dfrac{2 - z'}{10}$. Откуда исходное уравнение превращается в уравнение

$$\frac{2 - z'}{10} = \sqrt{z}, \quad \text{или} \quad z' = 2 - 10\sqrt{z}.$$

Заменяя z' на $\dfrac{dz}{dx}$, будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = 2 - 10\sqrt{z}, \quad \text{или} \quad dz = \left(2 - 10\sqrt{z}\right)\, dx.$$

Разделим обе части уравнения на $2 - 10\sqrt{z}$:

$$\frac{dz}{2 - 10\sqrt{z}} = dx.$$

Переменные разделились, что позволяет проинтегрировать:

$$\int \frac{dz}{2 - 10\sqrt{z}} = \int dx.$$

В интеграле в левой части последнего уравнения сделаем замену $t = 2 - 10\sqrt{z}$. Отсюда $z = \left(\dfrac{2 - t}{10}\right)^2$ и $dz = -2 \cdot \dfrac{2 - t}{10} \cdot \dfrac{dt}{10}$, или $dz = \dfrac{t - 2}{50}\, dt$. Тогда

$$\int \frac{t - 2}{50t}\, dt = \int dx, \quad \text{или} \quad \int \frac{dt}{50} - \int \frac{dt}{25t} = x + C_1,$$

здесь C_1 — произвольная постоянная. Интегралы в левой части табличные, следовательно, последнее равенство нам даёт

$$\frac{t}{50} - \frac{1}{25} \ln |t| = x + C_1,$$

или

$$\frac{2 - 10\sqrt{z}}{50} - \frac{1}{25} \ln |2 - 10\sqrt{z}| = x + C_1.$$

Но $z = 2x - 10y - 3$, поэтому последнее равенство приводит нас к

$$\frac{1}{5}\sqrt{2x - 10y - 3} + \frac{1}{25} \ln |2 - 10\sqrt{2x - 10y - 3}| = -x + C_2,$$

где $C_2 = -C_1 + \dfrac{1}{25}$. Окончательно

$$5\sqrt{2x-10y-3} + \ln|2-10\sqrt{2x-10y-3}| = C - 25x,$$

здесь $C = 25C_2$.

При делении уравнения $z' = 2-10\sqrt{z}$ на $2-10\sqrt{z}$ могло быть потеряно решение $z = \dfrac{1}{25}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $z = \dfrac{1}{25}$ — решение. Тогда $2x-10y-3 = \dfrac{1}{25}$ — второе решение исходного уравнения.

Пример 10. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:
а) $(x+2y)\,dx - x\,dy = 0$; б) $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$.

Решение. а) Данное уравнение однородное. Поэтому делаем замену $y = tx$. Тогда $dy = x\,dt + t\,dx$. Подставляя в уравнение, имеем

$$(x+2tx)\,dx - x(x\,dt + t\,dx) = 0, \quad \text{или} \quad (1+t)\,dx = x\,dt.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\ln|x| = \ln|t+1| + \ln|C|, \quad \text{или} \quad x = C(t+1),$$

здесь C — произвольная постоянная. Откуда

$$x = C\left(\frac{y}{x} + 1\right)$$

— решение исходного уравнения. При разделении переменных могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y = -x$ (получающиеся при $t = -1$). Непосредственной проверкой убеждаемся, что и $x = 0$ и $y = -x$ — тоже решения уравнения.

б) После замены $y = z^m$ уравнение принимает вид

$$2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6.$$

Последнее уравнение становится однородным, если степени всех его членов равны между собой: $4+(2m-1) = 4m = 6$. Эти равенства выполняются одновременно, если $m = \dfrac{3}{2}$, следовательно, уравнение можно свести к однородному заменой $y = z^{3/2}$.

Дальнейшие выкладки мы предлагаем провести самостоятельно.

Пример 11. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:
а) $y' + 2y = x$; б) $y' + 2y = xy^2$.

Решение. а) Решим изначально однородное уравнение: $y' + 2y = 0$. Заменяя y' на $\dfrac{dy}{dx}$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad \text{или} \quad dy = -2y\,dx.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx, \quad \text{или} \quad \ln|y| = -2x + C_1,$$

здесь C_1 — произвольная постоянная. Откуда $y = C \cdot e^{-2x}$. При разделении переменных мы делили на y, что может привести к потере решения $y = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = 0$ — решение, которое получается из общего $y = Ce^{-2x}$ при $C = 0$.

Применим теперь метод вариации произвольной постоянной:

$$y = C(x) \cdot e^{-2x}.$$

Имеем

$$y' = C'(x) \cdot e^{-2x} - C(x) \cdot 2e^{-2x}.$$

Подставим y' и y в неоднородное уравнение:

$$C'(x) \cdot e^{-2x} - C(x) \cdot 2e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = x.$$

Приводя подобные и умножая на e^{2x} обе части равенства, получим

$$C'(x) = xe^{2x}.$$

Отсюда

$$C(x) = \int xe^{2x}\,dx.$$

Интегрируя по частям (выкладки рекомендуем провести самостоятельно), получим

$$C(x) = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + \widehat{C},$$

где $\widehat{C}$ — произвольная постоянная.

Таким образом,

$$y = \left(\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + \widehat{C}\right)e^{-2x}, \quad \text{или} \quad y = \frac{2x-1}{4} + \widehat{C}e^{-2x}$$

— общее решение неоднородного уравнения.

б) Данное уравнение является уравнением Бернулли. Разделим обе части на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = x$$

и сделаем замену $z = \dfrac{1}{y}$. Тогда $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$, отсюда $\dfrac{y'}{y^2} = -z'$. Таким образом, уравнение свелось к линейному

$$-z' + 2z = x,$$

решая которое, с помощью описанного выше способа (см. п. а)), получим

$$z(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2} + Ce^{2x},$$

где C — произвольная постоянная. Тогда

$$y(x) = \frac{1}{1/4 + x/2 + Ce^{2x}}, \quad \text{или} \quad y(x) = \frac{4}{1 + 2x + 4Ce^{2x}}.$$

Пример 12. Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' + 4y' + 4y = (4 - 6x)e^{-2x}$.

Решение. Решим сначала однородное уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Оно имеет один корень $\lambda_1 = -2$ кратности 2. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}}(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (согласно правой его части) будем искать в виде

$$y_1(x) = x^2 e^{-2x}(Ax + B),$$

так как $\lambda = -2$ является корнем характеристического уравнения кратности 2. Подставляя в уравнение, будем иметь

$$(6Ax + 2B)e^{-2x} - 4(3Ax^2 + 2Bx)e^{-2x} + 4(Ax^3 + Bx^2)e^{-2x} +$$

$$+4(3Ax^2 + 2Bx)e^{-2x} - 8(Ax^3 + Bx^2)e^{-2x} +$$

$$+4(Ax^3+Bx^2)e^{-2x}=(4-6x)e^{-2x}.$$

Приводя подобные, деля на положительное выражение e^{-2x} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 6A=-6, \\ 2B=4. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A=-1$ и $B=2$. Тогда частное решение неоднородного имеет вид

$$y_1(x)=x^2(2-x)e^{-2x},$$

и

$$y_{\text{он}}(x)=y_{\text{оо}}(x)+y_1(x)=x^2(2-x)e^{-2x}+(C_1+C_2x)e^{-2x}$$

есть общее решение неоднородного уравнения.

Пример 13. Найти решение линейного дифференциального уравнения второго порядка $y''+22y'+122y=2x\cdot e^{-10x}$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2+22\lambda+122\lambda=0,$$

составленное для однородного уравнения $y''+22y'+122y=0$, имеет корни $\lambda_{1,2}=-11\pm i$, где i — мнимая единица, т. е. $i^2=-1$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}}(x)=C_1e^{-11x}\cos x+C_2e^{-11x}\sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Так как $\lambda=-10$ не является корнем характеристического уравнения и правая часть имеет специальный вид $2xe^{-10x}$, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{чн}}=(ax+b)e^{-10x},$$

где a и b — числа, подлежащие определению. Находим $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ и подставляем в неоднородное уравнение:

$$y'_{\text{чн}}=(a-10b-10ax)e^{-10x} \text{ и } y''_{\text{чн}}=20(-a+5b+5ax)e^{-10x},$$

$$20(-a+5b+5ax)e^{-10x}+22(a-10b-10ax)e^{-10x}+122(ax+b)e^{-10x}=2xe^{-10x}.$$

Приводя подобные слагаемые и умножая обе части на e^{10x}, будем иметь

$$2ax+2a+2b=2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях для определения a и b, получаем систему

$$\begin{cases} 2a = 2, \\ 2a + 2b = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a = 1$ и $b = -1$. Тогда

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) = C_1 e^{-11x} \cos x + C_2 e^{-11x} \sin x + (x-1)e^{-10x}$$

— общее решение неоднородного уравнения.

Находим теперь решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$. Имеем

$$y(0) = C_1 - 1,$$

отсюда $C_1 = 1$;

$$y'(0) = C_2 - 11C_1 + 11,$$

следовательно, $C_2 - 11C_1 + 11 = 1$. Откуда с учетом равенства $C_1 = 1$ имеем $C_2 = 1$. Таким образом,

$$y(x) = e^{-11x} \cos x + e^{-11x} \sin x + (x-1)e^{-10x}$$

— решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 14. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько останется соли в баке через час?

Решение. Пусть $Q(t)$ кг — количество соли в баке в момент времени t после начала истечения смеси из бака. Тогда $\dfrac{Q}{100}$ есть ее концентрация в данном растворе, а $\dfrac{Q}{100} \cdot 5\,dt$ — количество соли, вытекающее из бака за время dt минут. Следовательно, имеем дифференциальное уравнение

$$dQ = -0{,}05Q\,dt.$$

Здесь знак «$-$» указывает на то, что количество соли в баке уменьшается. Интегрируя уравнение, получаем $Q = Ce^{-0{,}05t}$. Поскольку при $t = 0$ в баке имелось 10 кг соли, то $C = 10$. Таким образом, $Q = 10e^{-0{,}05t}$ есть решение данной задачи. Полагая в последнем равенстве $t = 60$ мин, получаем, что количество соли в баке через час равно $10e^{-3}$ кг $\approx 0{,}5$ кг.

Пример 15. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится

0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение. Примем за независимое переменное время t, а за искомую функцию $y(t)$ — количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$. В одну минуту поступает 2 л раствора, а в Δt минут — $2\Delta t$ л; в этих $2\Delta t$ л содержится $0{,}3\cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ кг соли. С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ л раствора. В момент t во всем сосуде содержится $y(t)$ кг соли, следовательно, в $2\Delta t$ л вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\Delta t \cdot y(t)$ кг соли, если бы за время Δt содержание соли в сосуде не менялось. Но так как оно за это время меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta \to 0$, то в вытекающих $2\Delta t$ л содержится $0{,}2\Delta t(y(t) + \alpha)$ кг соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Таким образом, в растворе, втекающем за промежуток времени $(t, t+ + \Delta t)$, содержится $0{,}6\Delta t$ кг соли, а в вытекающем — $0{,}2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha)$ кг. Приращение количества соли за это время $y(t+\Delta t)-y(t)$ равно разности найденных величин, т. е.

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t \cdot (y(t) + \alpha).$$

Разделим на Δt и устремим Δt к 0. В левой части получится производная $y'(t)$, а в правой получим $0{,}6 - 0{,}2y(t)$, так как $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Окончательно получаем дифференциальное уравнение $y'(t) = 0{,}6 - - 0{,}2y(t)$. Решая его, получим

$$y(t) = 3 - Ce^{-0{,}2t}.$$

Так как при $t = 0$ соли в сосуде не было, то $y(0) = 0$. Полагая в последней формуле $t = 0$, найдем $y(0) = 3 - C$; $C = 3$. Подставляя это значение C, получим $y(t) = 3 - 3e^{-0{,}2t}$. При $t = 5$ в сосуде будет

$$y(5) = 3 - 3e^{-0{,}2\cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1{,}9 \text{ кг соли.}$$

Пример 16. Химическая реакция протекает при постоянной температуре и такова, что из 5 объемов вещества A и 1 объема вещества B образуется 6 объемов вещества C. В начальный момент времени известны количества веществ: 5 — объем вещества A, 1 — объем вещества B. Определить количество вещества C в момент времени $t = 6$. Коэффициент пропорциональности k принять равным 1.

Решение. В соответствии с законом действующих масс скорость образования вещества C (химической реакции) пропорциональна концентрациям реагирующих веществ. Обозначим через $x(t)$ объем вещества C в момент времени t. Тогда объемы веществ A и B в момент времени t будут равны соответственно $5 - \frac{5}{6} \cdot x(t)$ и $1 - \frac{1}{6} \cdot x(t)$. Скорость реакции есть производная от объема $x(t)$ вещества C по времени: $\frac{dx}{dt}$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \left(5 - \frac{5}{6} \cdot x\right)\left(1 - \frac{1}{6} \cdot x\right).$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{\left(5 - \frac{5}{6} \cdot x\right)\left(1 - \frac{1}{6} \cdot x\right)} = dt.$$

После интегрирования получаем

$$\frac{36}{5} \int \frac{dx}{(6-x)^2} = \int dt.$$

Откуда

$$\frac{36}{5} \cdot \frac{1}{6-x} = t + \widehat{C},$$

где $\widehat{C}$ — произвольная постоянная. Из последнего находим

$$x(t) = 6 - \frac{36}{5t + 5\widehat{C}}.$$

Для определения значения постоянной $\widehat{C}$ полагаем в последнем равенстве $t = 0$. Так как $x(0) = 0$, то $\widehat{C} = \frac{6}{5}$.

Таким образом,

$$x(t) = 6 - \frac{36}{5t + 6}.$$

Окончательно находим

$$x(6) = 6 - 1 = 5$$

— количество вещества C в момент времени $t = 6$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1
Дифференциальное и интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения

1–10. Вычислить пределы:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+10x}-1}{\sqrt{1-8x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-1}{3x^3+4x}$;
2. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+8x}-1}{1-\sqrt{1-10x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-x}{4x^4-x^3+1}$;
3. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{1-\sqrt{1-9x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+x}{-7x^4+7x^2+2}$;
4. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{1-\sqrt{1-13x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5-x^4}{-8x^5-1}$;
5. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{1-\sqrt{1-15x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5-10x^4}{19x^5+1}$;
6. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+13x}-1}{1-\sqrt{1-17x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{20x^4+1}{3x^3+3x^4}$;
7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+21x}-1}{\sqrt{1+8x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^9+7}{30x+8x^9}$;
8. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+23x}}{\sqrt{1-21x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7+4x^4}{7x^4+4x^3}$;
9. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+22x}-1}{1-\sqrt{1-19x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5+7x^5}{7x+5x^5}$;
10. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+24x}-1}{1-\sqrt{1-8x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{17x^5+1}{7x^5+17x}$.

11–20. Найти производную первого порядка следующих функций:

11. а) $y=\sin^3(\ln x)$; б) $y=e^{\cos(x^3)}$;
12. а) $y=\cos^3(\ln x)$; б) $y=e^{\sin(x^3)}$;
13. а) $y=\cos^4(\ln x)$; б) $y=e^{\sin(x^4)}$;
14. а) $y=\sin^4(\ln x)$; б) $y=e^{\cos(x^4)}$;
15. а) $y=\sin^5(\ln x)$; б) $y=e^{\cos(x^5)}$;
16. а) $y=\sin^7(\ln x)$; б) $y=e^{\cos(x^7)}$;
17. а) $y=\sin^8(\ln x)$; б) $y=e^{\cos(x^8)}$;
18. а) $y=\sin^9(\ln x)$; б) $y=e^{\cos(x^9)}$;
19. а) $y=\sin^{11}(\ln x)$; б) $y=e^{\cos(x^{11})}$;
20. а) $y=\cos^{11}(\ln x)$; б) $y=e^{\sin(x^{11})}$.

21–30. Найти производные первого и второго порядка следующих функций:

21. а) $y = \ln(x + \sqrt{50 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{20})$;
22. а) $y = \ln(x + \sqrt{48 + x^2})$; б) $y = \cos(x^{20})$;
23. а) $y = \ln(x + \sqrt{47 + x^2})$; б) $y = \cos(x^{21})$;
24. а) $y = \ln(x + \sqrt{45 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{21})$;
25. а) $y = \ln(x + \sqrt{43 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{30})$;
26. а) $y = \ln(x + \sqrt{142 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{31})$;
27. а) $y = \ln(x + \sqrt{102 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{32})$;
28. а) $y = \ln(x + \sqrt{120 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{33})$;
29. а) $y = \ln(x + \sqrt{119 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{34})$;
30. а) $y = \ln(x + \sqrt{191 + x^2})$; б) $y = \sin(x^{35})$.

31–40. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

31. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{7x - y}{1 + 7xy}$; б) $z = e^{xy^7}$;
32. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{7x + y}{1 - 7xy}$; б) $z = e^{-xy^7}$;
33. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{8x + y}{1 - 8xy}$; б) $z = e^{-xy^8}$;
34. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{8x - y}{1 + 8xy}$; б) $z = e^{xy^8}$;
35. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{9x - y}{1 + 9xy}$; б) $z = e^{xy^9}$;
36. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{11x - y}{1 + 11xy}$; б) $z = e^{xy^{11}}$;
37. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{12x - y}{1 + 12xy}$; б) $z = e^{xy^{12}}$;
38. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{12x + y}{1 - 12xy}$; б) $z = e^{-xy^{12}}$;
39. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{13x + y}{1 - 13xy}$; б) $z = e^{-xy^{13}}$;
40. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{13x - y}{1 + 13xy}$; б) $z = e^{xy^{13}}$.

41–50. Найти неопределенный интеграл:

41. а) $\displaystyle\int x^5 e^{x^6}\,dx$; б) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 5x\,dx$;
42. а) $\displaystyle\int x^6 e^{x^7}\,dx$; б) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 5x\,dx$;

43. а) $\int x^7 e^{x^8}\,dx$; б) $\int e^{2x}\cos 7x\,dx$;

44. а) $\int x^8 e^{x^9}\,dx$; б) $\int e^{2x}\sin 7x\,dx$;

45. а) $\int x^9 e^{x^{10}}\,dx$; б) $\int e^{2x}\sin 9x\,dx$;

46. а) $\int x^{10} e^{x^{11}}\,dx$; б) $\int e^{2x}\cos 9x\,dx$;

47. а) $\int x^{11} e^{x^{12}}\,dx$; б) $\int e^{2x}\cos 10x\,dx$;

48. а) $\int x^{12} e^{x^{13}}\,dx$; б) $\int e^{2x}\sin 11x\,dx$;

49. а) $\int x^{13} e^{x^{14}}\,dx$; б) $\int e^{2x}\sin 13x\,dx$;

50. а) $\int x^{14} e^{x^{15}}\,dx$; б) $\int e^{2x}\sin 15x\,dx$.

51–60. Вычислить:

51. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 5x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos 7x\,dx$;

52. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 5x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin 7x\,dx$;

53. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 7x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin 9x\,dx$;

54. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 7x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos 9x\,dx$;

55. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 9x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos 11x\,dx$;

56. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 9x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin 11x\,dx$;

57. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 11x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos 13x\,dx$;

58. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 11x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin 13x\,dx$;

59. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 13x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos 13x\,dx$;

60. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 13x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin 15x\,dx$.

61–70. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

61. $y = x,\ y = \dfrac{1}{x^2},\ y = -x^2,\ x = 5;$
62. $y = x^2,\ y = \dfrac{1}{x^2},\ y = -x,\ x = 5;$
63. $y = x^3,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = -x,\ x = 5;$
64. $y = x^2,\ y = \dfrac{1}{x^2},\ y = -x,\ x = 7;$
65. $y = x,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = -x^3,\ x = 3;$
66. $y = 2x,\ y = \dfrac{2}{x^2},\ y = -x^2,\ x = 5;$
67. $y = 3x,\ y = \dfrac{3}{x},\ y = -x^2,\ x = 7;$
68. $y = -3x,\ y = \dfrac{3}{x},\ y = 3x^2,\ x = 5;$
69. $y = -4x,\ y = \dfrac{4}{x},\ y = 4x^2,\ x = 3;$
70. $y = x^3,\ y = -x,\ y = -\dfrac{1}{x},\ x = 8.$

71–80. Провести полное исследование функции и построить ее график:

71. $y = x + \dfrac{1}{x^2};$
72. $y = x + \dfrac{1}{(x-1)^2};$
73. $y = x + \dfrac{1}{(x+2)^2};$
74. $y = x + \dfrac{1}{(x-2)^2};$
75. $y = x + \dfrac{1}{(x-4)^2};$
76. $y = x + \dfrac{1}{(x-5)^2};$
77. $y = x + \dfrac{1}{(x-7)^2};$
78. $y = x + \dfrac{1}{(x-8)^2};$
79. $y = x + 1 + \dfrac{1}{x^2};$
80. $y = x - 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}.$

81–90. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

81. а) $xy' = 2y$; б) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$;
82. а) $yy' = x$; б) $y' = \sqrt{4x - 2y + 3}$;
83. а) $x^2y' = 1/y$; б) $y' = \sqrt{-4x + 2y - 7}$;
84. а) $x^3y' = 1/y$; б) $y' = \sqrt{-3x - 3y - 7}$;
85. а) $x^{-2}y' = y$; б) $y' = \sqrt{-8x + 9y + 1}$;
86. а) $x^{-3}y' = y$; б) $y' = \sqrt{-18x + y}$;
87. а) $x^4y' = y^2$; б) $y' = \sqrt{10x + y - 3}$;
88. а) $x^4y' = 1/y$; б) $y' = \sqrt{x - y + 5}$;
89. а) $x^5y' = 1/y$; б) $y' = \sqrt{8x - 7y + 20}$;
90. а) $x^{-5}y' = 1/y$; б) $y' = \sqrt{17x + 20y - 3}$.

91–100. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

91. а) $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$; б) $2y' + x = 4\sqrt{y}$;
92. а) $xy' = y\sin\ln\dfrac{y}{x}$; б) $\dfrac{2}{x}y' + x^2 = 4\sqrt{y}$;
93. а) $xy' = y\cos\ln\dfrac{x}{y}$; б) $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$;
94. а) $xy' = y\sin\ln\dfrac{x}{y}$; б) $2x' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$;
95. а) $y^2 + x^2y' = xyy'$; б) $x^3(y' - x) = y^2$;
96. а) $y^2 - x^2y' = xyy'$; б) $2x^2y' = y^3 + xy$;
97. а) $y^2 - x^2y' = -xyy'$; б) $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$;
98. а) $(y^2 - 2xy)y' + x^2 = 0$; б) $2xy' + (x^2y^4 + 1)y = 0$;
99. а) $(y^2 + 2xy)y' + x^2 = 0$; б) $y + x(2xy + 1)y' = 0$;
100. а) $(y^2 + 4xy)y' + 4x^2 = 0$; б) $x^3(y' - x) = y^2$.

101–110. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

101. а) $xy' - y = x^2\cos x$; б) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = y^2x\ln x$;
102. а) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; б) $y'\sin x - y\cos x = y^2$;
103. а) $y'\cos x + y = 1 - \sin x$; б) $y' - y\cos x = y^2\cos x$;
104. а) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^4}$; б) $y' - y\dfrac{\ln x}{x} = y^2\dfrac{\ln x}{x}$;
105. а) $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$; б) $xy' - y = y^2x\cos x$;
106. а) $y'\sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$; б) $y' + 2xy = y^2xe^{-x^2}$;
107. а) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$; б) $y'\cos x - y = y^2(1 - \sin x)$;

108. а) $y' \sin x - y \cos x = 1$; б) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^4}$;
109. а) $y' - y\cos x = \cos x$; б) $(1 + x^2)y' + y = y^2 \operatorname{arctg} x$;
110. а) $y' - y\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$; б) $y'\sqrt{1-x^2} + y = y^2 \arcsin x$.

111–120. Решить дифференциальное уравнение второго порядка:

111. $y'' + 7y' + 6y = 35e^{-6x}$;
112. $y'' + 6y' + 5y = 24e^{-5x}$;
113. $y'' - 3y' - 4y = 15e^{4x}$;
114. $y'' - 4y' - 5y = 24e^{5x}$;
115. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$;
116. $y'' + 4y' + 3y = 8e^{-3x}$;
117. $y'' - 5y' - 6y = 35e^{6x}$;
118. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$;
119. $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$;
120. $y'' - 6y' - 7y = 48e^{7x}$.

121–130. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:
121. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;
122. $y'' - 6y' + 10y = 2xe^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
123. $y'' + 4y' + 5y = 2xe^{-x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$;
124. $y'' + 6y' + 10y = 2xe^{-2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$;
125. $y'' - 8y' + 17y = 2xe^{3x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = -2$;
126. $y'' - 14y' + 50y = 2xe^{6x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$;
127. $y'' + 14y' + 50y = 2xe^{-8x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -3$;
128. $y'' + 10y' + 26y = 2xe^{-4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$;
129. $y'' - 10y' + 26y = 2xe^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
130. $y'' - 2y' + 2y = 2x^2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

131. Сосуд объемом в 20 л содержит воздух (80 % азота и 20 % кислорода). В сосуд при непрерывном перемешивании каждую секунду втекает 0,1 л азота, вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99 % азота?
132. В воздухе комнаты объемом 200 м^3 содержится 0,15 % углекислого газа CO_2. Вентилятор подает в минуту 20 м^3 воздуха, содержащего 0,04 % CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?
133. Скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20 °C. Когда тело остынет до 25 °C, если за 10 минут оно охладилось от 100 °C до 60 °C?

134. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре 20 °С, опущен металлический предмет массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью $0{,}2c_{\mathrm{H_2O}}$ и температурой 75 °С. Через минуту вода нагрелась на 2 °С. Когда температуры воды и предмета будут отличаться одна от другой на 1 °С? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.
135. Кусок металла с температурой a помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a до b. Скорость нагрева металла пропорциональна разности T температур печи и металла, коэффициент пропорциональности равен k. Найти температуру тела через час.
136. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, а через 4 с скорость ее 1 м/с. Когда скорость лодки уменьшится до 1 см/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?
137. За 30 дней распалось 50 % первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1 % от первоначального количества?
138. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?
139. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы, считая, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебрегая наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).
140. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглощает слой толщиной в 2 м?

Пусть жидкость вытекает из некоторого сосуда через отверстие в нем со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10$ м/с^2, h — высота уровня жидкости над отверстием.
141. За какое время вся жидкость вытечет из цилиндрического бака с диаметром $2R = 1{,}8$ м и высотой $H = 2{,}45$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 6{,}6$ см? Ось цилиндра вертикальная.
142. Воронка имеет форму кругового конуса радиуса $R = 6$ см и высоты

$H = 10$ см, обращенного вершиной вниз. За какое время из воронки вытечет вся вода через круглое отверстие диаметром 0,5 см, сделанное в вершине конуса?

143. В прямоугольный бак размером 60 см $\times$ 75 см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью $S = {}$ $= 2{,}5$ см^2. За какое время наполнится бак?

144. Резиновый шнур длиной 1 м под действием силы f кГ удлиняется на kf метров. На сколько удлинится такой же шнур длины l и веса P под действием своего веса, если его подвесить за один конец?

145. Найти атмосферное давление на высоте h, если на поверхности Земли давление равно 1кГ/см^2 и плотность воздуха 0,0012 г/см^3.

146. На вращающийся в жидкости диск действует замедляющая его движение сила трения, пропорциональная угловой скорости вращения. Найти зависимость угловой скорости от времени, если вначале диск вращался со скоростью 100 оборотов в минуту, а по истечении одной минуты — 60 оборотов в минуту.

147. В закрытом помещении объемом Vм^3 находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего 1 м^3 воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющимся в 1 м воздуха в рассматриваемый момент (считаем, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было m_0 г воды, а в 1 м^3 воздуха — q_0 г пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени t?

148. Цилиндрический резервуар с высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиусом 1/12 м, сделанное в дне резервуара?

149. Определить время, необходимое для установления одинакового уровня в двух сообщающихся сосудах. Малое отверстие между сосудами имеет площадь ω м^2. Площади горизонтальных сечений первого и второго сосудов составляют S_1 м^2 и S_2 м^2, в начальный момент уровень жидкости в первом сосуде находится на высоте h_1 м от отверстия, а во втором — на высоте h_2 м ($h_2 < h_1$).

150. Найти время, в течение которого вся вода вытечет из конической воронки, если известно, что половина вытекает за 2 мин.

151–160. Химическая реакция протекает при постоянной температуре и такова, что из m объемов вещества A и n объемов вещества B образуется $m+n$ объемов вещества C. В начальный момент времени известны количества веществ: a — объем вещества A, b — объем вещества B. Определить количество вещества C в момент времени $t = T$. Коэффициент пропорциональности k принять равным 1.

	Номер задания									
	151	**152**	**153**	**154**	**155**	**156**	**157**	**158**	**159**	**160**
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	11	9	7	5	6	7	5	3	4	1
a	2	6	6	8	10	12	14	16	18	20
b	22	27	14	10	12	14	10	6	8	2
T	12	11	10	9	11	13	12	11	13	11

Пример решения контрольной работы № 2

Пример 17. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара — белые?

Решение. Здесь число всех исходов $n = 10 \cdot 9 = 90$. Число же исходов, благоприятствующих событию A, равно $m = 6 \cdot 5 = 30$. Тогда $P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

Пример 18. Некоторая вакцина эффективна на 70 % в формировании иммунитета. Вакцинировали двух человек. Пусть A и B — события, состоящие в том, что соответственно первый и второй человек приобретает иммунитет. Найти вероятность того, что: а) оба человека приобрели иммунитет; б) первый приобрел иммунитет, а второй нет.

Решение. По условию $P(A) = P(B) = \frac{70}{100} = 0{,}7$. Пусть C — оба человека приобрели иммунитет; D — первый приобрел, а второй — нет. Тогда $C = A \cdot B$ и $D = A \cdot \overline{B}$, и так как события A и B по условию независимы, то

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49,$$
$$P(D) = P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}21.$$

Пример 19. Для решения вопроса идти в кино или на лекцию студент подбрасывает монету. Если студент пойдет на лекцию, он разберется в теме с вероятностью 0,9, а если в кино — с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что студент разберется в теме?

Решение. Пусть событие A — студент разберется в теме; гипотеза H_1 — студент идет в кино; H_2 — на лекцию. По условию $P(H_1) = P(H_2) = \dfrac{1}{2}$ и $P_{H_1}(A) = 0{,}3$, $P_{H_2}(A) = 0{,}9$. Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 = 0{,}6.$$

Пример 20. В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием K, 30 % — с заболеванием L, 20 % — с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

Решение. Пусть событие A — пациент выписан здоровым; гипотеза H_1 — поступивший больной страдал заболеванием K; гипотеза H_2 — больной страдал заболеванием L; H_3 — больной страдал заболеванием M. По условию $P(H_1) = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$, $P(H_2) = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$, $P(H_3) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$; условные вероятности по условию равны $P_{H_1}(A) = 0{,}7$, $P_{H_2}(A) = 0{,}8$, $P_{H_3}(A) = 0{,}9$. По формуле Байеса вероятность $P_A(H_1)$ того, что выписанный здоровым больной страдал заболеванием K, равна

$$P_A(H_1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}7}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}7 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}9} = \frac{0{,}35}{0{,}77} = \frac{5}{11}.$$

Пример 21. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение. Пусть A — партия выиграна. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша $p = \dfrac{1}{2}$; следовательно, вероятность проигрыша $q = 1 - p = \dfrac{1}{2}$. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна, и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли.

Найдем вероятность того, что две партии из четырех будут выиграны:

$$P_{2,4}(A) = C_4^2 p^2 q^4 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

Вероятность того, что будут выиграны три партии из шести, равна

$$P_{3,6}(A) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Так как $P_{2,4}(A) > P_{3,6}(A)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

Пример 22. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_{k,n}(A) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_1),$$

где x_1 равно

$$x_1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400\cdot 0{,}6}{\sqrt{2400\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}} = -\frac{40}{24} = -1{,}67.$$

Так как функция $\varphi(x)$ — четная, то $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$.

По таблице А приложения найдем $\varphi(1{,}67) = 0{,}09893$. Искомая вероятность

$$P_{1400,2400}(A) = \frac{1}{24}\cdot 0{,}09893 = 0{,}00412.$$

Пример 23. Вероятность появления события A за время испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появится не менее 75 и не более 90 раз.

Решение. Согласно интегральной теореме Лапласа

$$P_{75,90}(A) = \Phi\left(\frac{90 - 0{,}8\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0{,}8\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) = \\ = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25).$$

Значение функции Лапласа определяем по таблице Б приложения: $\Phi(2{,}5) = 0{,}49379$, $\Phi(1{,}25) = 0{,}39435$. Тогда

$$P_{75,90}(A) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}49379 + 0{,}39435 = 0{,}88814.$$

Пример 24. Непрерывная случайная величина X задана своей плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ Ax^3, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;

5) определить вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $[0; 0{,}5]$.

Решение. 1. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, то $\int\limits_0^1 Ax^3\,dx = 1$, или $A \cdot \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{x=1} = 1$. Отсюда следует, что $A = 4$.

2. Функцию распределения вероятности найдем из формулы: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$. Рассмотрим три случая: а) $x \leqslant 0$; б) $0 < x \leqslant 1$; в) $x > 1$.

а) Если $x \leqslant 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot ds = 0$.

б) Если $0 < x \leqslant 1$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot ds + \int\limits_{0}^{x} 4s^3\,ds = 4 \cdot \left.\frac{s^4}{4}\right|_{s=0}^{s=x} = x^4.$$

в) Если $x > 1$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot ds + \int\limits_{0}^{1} 4s^4\,ds + \int\limits_{1}^{x} 0 \cdot ds = 4 \cdot \left.\frac{s^4}{4}\right|_{s=0}^{s=1} = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^4, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены на рис. 1.

4. Математическое ожидание равно

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} x \cdot 4 \cdot x^3\,dx = 4 \cdot \left.\frac{x^5}{5}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{5}.$$

Дисперсия равна

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(x)]^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2 \cdot 4x^3\,dx - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 4 \cdot \frac{x^6}{6}\bigg|_{x=0}^{x=1} - \frac{16}{25} = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75}.$$

5. Искомая вероятность $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$ равна

$$P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0) = (0{,}5)^4 - 0^4 = 0{,}0625.$$

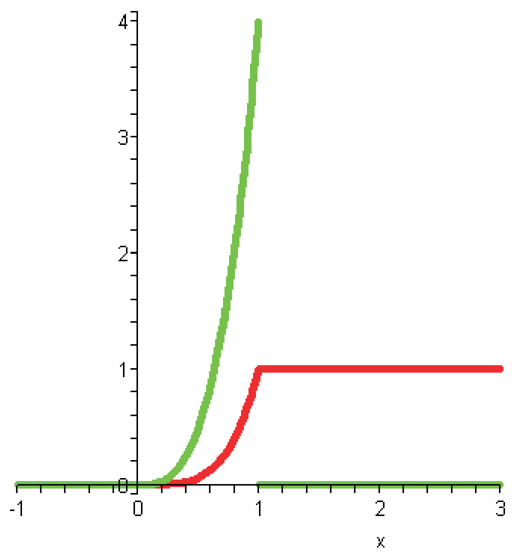

Рис. 1. Графики функций $y = f(x)$ и $y = F(x)$

Пример 25. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ A\sin x, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;

5) определить вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение. 1. Так как случайная величина X по условию непрерывна, то $F\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} F(x) = 1$, т. е. $A \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 1$. Отсюда $A = \sqrt{2}$.

2. Плотность распределения вероятности найдем из формулы $f(x) = F'(x)$. Для этого рассмотрим три случая: а) $x \leqslant 0$; б) $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$; в) $x > \frac{\pi}{4}$.

а) В случае $x \leqslant 0$ имеем $f(x) = F'(x) = 0$.

б) Случай $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$: $f(x) = \left(\sqrt{2}\sin x\right)' = \sqrt{2}\cos x$.

в) Этот случай аналогичен случаю а).

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{2}\cos x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & x \geqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

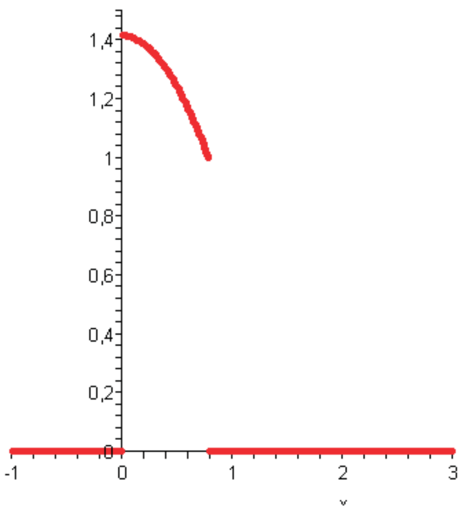

Рис. 2. График функции $f(x)$

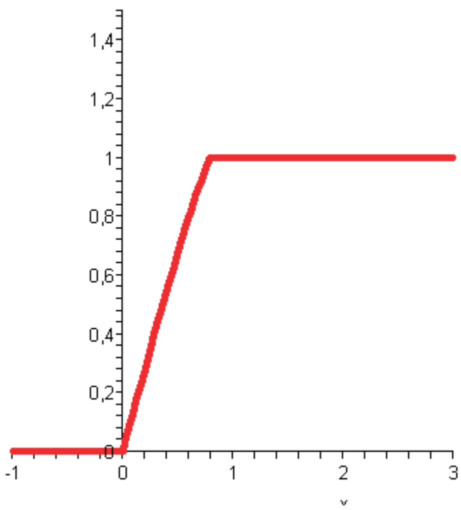

Рис. 3. График функции $F(x)$

4. Математическое ожидание равно

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\pi/4} x\sqrt{2}\sin x\,dx.$$

Проинтегрируем последний интеграл по частям, взяв $u = \sqrt{2}x$ и $dv = \sin x\,dx$. Тогда $du = \sqrt{2}\,dx$ и $v = -\cos x$, следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\pi/4} x\sqrt{2}\sin x\,dx = x\sqrt{2}\cdot(-\cos x)\Big|_{x=0}^{\pi/4} - \int\limits_{0}^{\pi/4}(-\cos x)\sqrt{2}\,dx =$$
$$= -\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\sin x\Big|_{x=0}^{x=\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Дисперсия равна

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2 = \int\limits_{0}^{\pi/4} x^2\sqrt{2}\sin x\,dx - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Проинтегрируем интеграл по частям, взяв $u = \sqrt{2}x^2$ и $dv = \sin x\,dx$. Отсюда $du = 2\sqrt{2}x\,dx$ и $v = -\cos x$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{\pi/4} x^2\sqrt{2}\sin x\,dx = \sqrt{2}x^2(-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/4} - \int\limits_{0}^{\pi/4} 2\sqrt{2}(-\cos x)\,dx =$$
$$= -\frac{\pi^2}{16} + \int\limits_{0}^{\pi/4} 2\sqrt{2}x\cos x\,dx.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, взяв $u = 2\sqrt{2}x$ и $dv = \cos x\,dx$. Отсюда $du = 2\sqrt{2}\,dx$ и $v = \sin x$. Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\pi/4} x^2\sqrt{2}\sin x\,dx = -\frac{\pi^2}{16} + 2\sqrt{2}x\sin x\Big|_{x=0}^{x=\pi/4} - \int\limits_{0}^{\pi/4} 2\sqrt{2}\sin x\,dx =$$
$$= -\frac{\pi^2}{16} + \pi - 2\sqrt{2}(-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} + 2.$$

Тогда

$$D(X) = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} + 2 - 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} = 1 + \pi - 2\sqrt{2} - \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, равна

$$P\left(\frac{\pi}{6} \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 26. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами: $a = 3$ (математическое ожидание) и $\sigma = 1$ (среднеквадратичное отклонение). Требуется:

1) написать плотность распределения вероятности и построить ее график;

2) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $[2, 6]$;

3) найти вероятность того, что случайная величина X отклонится (по модулю) от a не более, чем на $\delta = 1$;

4) применяя правило «трёх сигм», найти значения случайной величины X.

Решение. 1. Плотность распределения вероятности в общем случае равна

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где a — математическое ожидание и σ — среднеквадратичное отклонение. В нашем случае $a = 3$ и $\sigma = 1$, поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2},$$

график которой изображен на рис. 4.

2. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $[2, 6]$, равна

$$P(2 \leqslant X \leqslant 6) = \Phi\left(\frac{6-3}{1}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{1}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, значения которой приведены в приложении в таблице Б. Окончательно находим

$$P(2 \leqslant X \leqslant 6) = 0{,}49865 + 0{,}47725 = 0{,}97590.$$

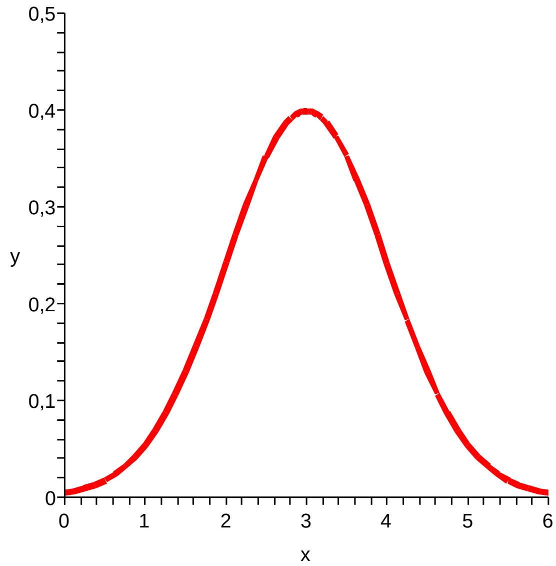

Рис. 4. График плотности распределения вероятностей

3. Имеем

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{1}{1}\right) = 2 \cdot 0{,}34134 = 0{,}68268.$$

4. Согласно правилу «трёх сигм» значения случайной величины X принадлежат отрезку $[a - 3\sigma, a + 3\sigma]$, т. е. $[3 - 3 \cdot 1, 3 + 3 \cdot 1]$, или $[0, 6]$.

Пример 27. Для выяснения эффективности применения некоторого препарата исследовали некоторый показатель жизнедеятельности у животных двух групп. Среднее значение этого показателя для $n = 12$ животных опытной группы (т. е. той группы, в которой применялся препарат) составило $\overline{x} = 7{,}1$ при исправленной выборочной дисперсии $s_X^2 = 0{,}12$. Для $m = 10$ животных контрольной группы соответствующие показатели оказались равными $\overline{y} = 7{,}9$ и $s_Y^2 = 0{,}09$. В предположении справедливости нормального закона распределения изучаемого показателя у животных как опытной, так и контрольной групп при уровне значимости $p = 0{,}05$ определить:

1) значимо ли различаются найденные исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2 (при конкурирующей гипотезе, состоящей в утверждении о неравенстве соответствующих генеральных дисперсий);

2) значимо ли различаются между собой найденные средние значения изучаемого показателя для двух групп животных. Иными словами, позволяют ли проведенные исследования утверждать, что дан-

ный препарат действительно оказывает определенное воздействие на изучаемый показатель жизнедеятельности животных?

Решение. 1. Пусть $H_0 : D(X) = D(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : D(X) \neq D(Y)$. Вычислим статистику критерия

$$\Lambda = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = 1{,}33333$$

и критическую точку распределения Фишера – Снедекора с $n-1$ и $m-1$ степенями свободы и уровне значимости $p = 0{,}05$ (значение $t_{\text{кр}}(0{,}05; 11; 10)$ взято из таблицы Г приложения):

$$t_{\text{кр}}(0{,}05/2; 11; 9) > t_{\text{кр}}(0{,}05; 11; 10) = 2{,}85362,$$

так как $t_{\text{кр}}(\alpha; 11; m)$ убывает с ростом α и m. Так как $|\Lambda| = 1{,}33333 < < 2{,}85362$, то нулевую гипотезу принимают на уровне значимости $p = = 0{,}05$.

2. Введем нулевую гипотезу $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, т. е. генеральные средние равны; конкурирующая гипотеза $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ — генеральные средние неравны.

Находим результирующую оценку общей дисперсии

$$S^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} = \frac{(12-1)\cdot 0{,}12 + (10-1)\cdot 0{,}09}{12+10-2} = 0{,}1065$$

и статистику критерия

$$\Lambda = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} = \frac{7{,}2 - 7{,}9}{0{,}32634 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{10}}} = -5{,}00965.$$

Так как Λ имеет распределение Стьюдента с $(n+m-2)$ степенями свободы, то находим критическую точку $t_{\text{кр}}(p, n+m-2)$ по таблице В приложения:

$$t_{\text{кр}}(0{,}05; 20) = 2{,}08596.$$

Так как $|\Lambda| = 5{,}00965 > t_{\text{кр}}(0{,}05; 20) = 2{,}08596$, то нулевую гипотезу следует отклонить на уровне значимости $p = 0{,}05$.

Пример 28. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить эффективность воздействия двух факторов — температуры (фактор F) в $^{\circ}$C и фермента (фактор G) в условных единицах (усл. ед.) на выход продукта биохимического синтеза по результатам экспериментов, приведенных в таблице.

$G \diagdown F$	F_1	F_2	F_3
G_1	32	25	7
G_2	25	18	7
G_3	17	18	11

Решение. Выдвигаем гипотезы $H_F : F_1 = F_2 = F_3$ и $H_G : G_1 = G_2 = G_3$. Составляем таблицу:

$G \diagdown F$	F_1	F_2	F_3	$\sum$
G_1	32	25	7	64
G_2	25	18	7	50
G_3	17	18	11	46
$\sum$	74	61	25	160

Находим факторные дисперсии:

$$S_F^2 = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{p} x_{i\cdot}^2 - \frac{1}{pq}x_{\cdot\cdot}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{3-1}\left(\frac{1}{3}\left(74^2 + 61^2 + 25^2\right) - \frac{1}{3\cdot 3}\cdot 160^2\right) = 214{,}77778$$

и

$$S_G^2 = \frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{q} x_{\cdot j}^2 - \frac{1}{pq}x_{\cdot\cdot}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{3-1}\left(\frac{1}{3}\left(64^2 + 50^2 + 46^2\right) - \frac{1}{3\cdot 3}\cdot 160^2\right) = 29{,}77778.$$

Находим остаточную дисперсию. Для этого находим сначала S^2:

$$S^2 = \sum_{i,j} x_{ij}^2 = \frac{1}{pq}x_{\cdot\cdot}^2 =$$
$$= 32^2 + 25^2 + 7^2 + 25^2 + 18^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 11^2 - \frac{1}{3\cdot 3}\cdot 160^2 = 585{,}55556.$$

Тогда

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{(p-1)(q-1)}\left(S^2 - (p-1)S_F^2 - (q-1)S_G^2\right) =$$
$$= \frac{1}{(3-1)(3-1)}(585{,}55556 - (3-1)\cdot 214{,}77778 - (3-1)\cdot 29{,}77778) =$$
$$= 24{,}11111.$$

Следовательно, статистики критерия равны

$$\Lambda_F = \frac{S_F^2}{S_{\text{ост}}} = \frac{214{,}77778}{24{,}11111} = 8{,}90783 \text{ и } \Lambda_G = \frac{S_G^2}{S_{\text{ост}}} = \frac{29{,}77778}{24{,}11111} = 1{,}23502.$$

Найдем критические точки распределения Фишера – Снедекора: $f_{\text{кр}}(0{,}05; 3-1; (3-1)(3-1))$ — для Λ_F и $f_{\text{кр}}(0{,}05; 3-1; (3-1)(3-1))$ — для Λ_G. Отметим, что критические точки равны, так как $p = q$ — количество уровней фактора F равно количеству уровней фактора G. Имеем

$$f_{\text{кр}}(0{,}05; 2; 4) = 6{,}94428.$$

Так как $f_{\text{кр}}(0{,}05; 2; 4) = 6{,}94428 < 8{,}90783 = \Lambda_F$ и $f_{\text{кр}}(0{,}05; 2; 4) = 6{,}94428 > 1{,}23502 = \Lambda_G$, то делаем вывод, что фактор F оказывает влияние на выход продукта биохимического синтеза, а фактор G — не оказывает.

Пример 29. Изучалась зависимость массы M, кг животных от объема их тела V, дм^3. Результаты наблюдений приведены в виде корреляционной таблицы (пропуски означают нули). Требуется:

1) вычислить выборочный коэффициент корреляции M и V;

2) написать уравнение линейной регрессии M на V;

3) написать выборочное уравнение прямой среднеквадратичной регрессии M на V;

4) вычислить значения в точках V_i выборочной функции регрессии M на V;

5) при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о некоррелированности массы животных и объема их тела.

M \ V	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
5,0	4	3			
5,2	2	4	6		
5,4		4	5	4	
5,8			4	6	4
6,0				3	3

Решение. Находим сумму в каждой строке (без учета первого столбца) и в каждом столбце (без учета первой строки). Результаты вычислений заносим в таблицу:

$M \backslash V$	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	$n_{\cdot j}$
5,0	4	3				7
5,2	2	4	6			12
5,4		4	5	4		13
5,8			4	6	4	14
6,0				3	3	6
$n_{i\cdot}$	6	11	15	13	7	52

В последней ячейке мы нашли n:

$$n = \sum_{i,j} n_{i,j} = 52.$$

Находим средние $\overline{V}$, $\overline{M}$ и $\overline{VM}$:

$$\overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} v_i n_{i\cdot} = \\ = \frac{1}{52}\left(4{,}0\cdot 6 + 4{,}2\cdot 11 + 4{,}4\cdot 15 + 4{,}6\cdot 13 + 4{,}8\cdot 7\right) = 4{,}41538,$$

$$\overline{M} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} m_j n_{\cdot j} = \\ = \frac{1}{52}\left(5{,}0\cdot 7 + 5{,}2\cdot 12 + 5{,}4\cdot 13 + 5{,}8\cdot 14 + 6{,}0\cdot 6\right) = 5{,}47692,$$

$$\overline{VM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j=1}^{k} m_j n_{ij} = \\ = \frac{1}{52}\left(4{,}0\cdot(5{,}0\cdot 4 + 5{,}2\cdot 2) + 4{,}2\cdot(5{,}0\cdot 3 + 5{,}2\cdot 4 + 5{,}4\cdot 4) + \right. \\ + 4{,}4\cdot(5{,}2\cdot 6 + 5{,}4\cdot 5 + 5{,}8\cdot 4) + 4{,}6\cdot(5{,}4\cdot 4 + 5{,}8\cdot 6 + 6{,}0\cdot 3) + \\ \left. + 4{,}8\cdot(5{,}8\cdot 4 + 6{,}0\cdot 3)\right) = 24{,}24692.$$

Находим среднее арифметическое квадратов $\overline{V^2}$ и $\overline{M^2}$:

$$\overline{V^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} v_i^2 n_{i\cdot} =$$

$$= \frac{1}{52}\left(4{,}0^2 \cdot 6 + 4{,}2^2 \cdot 11 + 4{,}4^2 \cdot 15 + 4{,}6^2 \cdot 13 + 4{,}8^2 \cdot 7\right) = 19{,}55385,$$

$$\overline{M^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} m_j^2 n_{\cdot j} =$$
$$= \frac{1}{52}\left(5{,}0^2 \cdot 7 + 5{,}2^2 \cdot 12 + 5{,}4^2 \cdot 13 + 5{,}8^2 \cdot 14 + 6{,}0^2 \cdot 6\right) = 30{,}10615.$$

Тогда оценки дисперсий и ковариации равны

$$S_V^2 = \overline{V^2} - \overline{V}^2 = 19{,}55385 - 4{,}41538^2 = 0{,}05827,$$
$$S_M^2 = \overline{M^2} - \overline{M}^2 = 30{,}10615 - 5{,}47692^2 = 0{,}10950,$$
$$l_{VM} = \overline{VM} - \overline{V} \cdot \overline{M} = 24{,}24692 - 4{,}41538 \cdot 5{,}47692 = 0{,}06424.$$

Отсюда находим выборочный коэффициент корреляции $\overline{r}$:

$$\overline{r} = \frac{\overline{VM} - \overline{V} \cdot \overline{M}}{\sqrt{\left(\overline{V^2} - \overline{V}^2\right) \cdot \left(\overline{M^2} - \overline{M}^2\right)}} = \frac{0{,}06424}{\sqrt{0{,}05827 \cdot 0{,}10950}} = 0{,}80422.$$

Находим коэффициенты линейной регрессии M на V:

$$a_1 = \frac{\overline{VM} - \overline{V} \cdot \overline{M}}{\overline{V^2} - \overline{V}^2} = 0{,}80422$$

и

$$a_0 = \overline{M} - a_1 \cdot \overline{V} = 5{,}47692 - 0{,}80422 \cdot 4{,}41538 = 1{,}92598.$$

Отсюда уравнение линейной регрессии M на V имеет вид

$$M = a_0 + a_1 \cdot V, \quad M = 1{,}92598 + 0{,}80422 \cdot V.$$

Выборочное уравнение прямой среднеквадратичной регрессии M на V:

$$M = \overline{M} + \overline{r} \cdot \frac{S_M}{S_V} \cdot (V - \overline{V}),$$

$$M = 5{,}47692 + 0{,}80422 \cdot \frac{\sqrt{0{,}10950}}{\sqrt{0{,}05827}} \cdot (V - 4{,}41538) = 0{,}60918 + 1{,}10245 \cdot V.$$

Находим значения M_i выборочной функции регрессии:

$$\begin{aligned}
M(4{,}0) &= 0{,}60918 + 1{,}10245 \cdot 4{,}0 = 5{,}01898,\\
M(4{,}2) &= 0{,}60918 + 1{,}10245 \cdot 4{,}2 = 5{,}23947,\\
M(4{,}4) &= 0{,}60918 + 1{,}10245 \cdot 4{,}4 = 5{,}45996,\\
M(4{,}6) &= 0{,}60918 + 1{,}10245 \cdot 4{,}6 = 5{,}68045,\\
M(4{,}8) &= 0{,}60918 + 1{,}10245 \cdot 4{,}8 = 5{,}90094.
\end{aligned}$$

Для ответа на последний пункт задачи выдвигаем нулевую гипотезу $H_0 : \rho = 0$ и конкурирующую $H_1 : \rho \neq 0$, где ρ — неизвестный коэффициент корреляции M и V.

Находим статистику критерия Λ:

$$\Lambda = \frac{\overline{r} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\overline{r}^2}} = \frac{0{,}80422 \cdot \sqrt{52-2}}{\sqrt{1-0{,}80422^2}} = 9{,}56822.$$

По таблице В критических точек распределения Стьюдента найдем $t_{\text{кр}}(\alpha; n-2)$:

$$t_{\text{кр}}(0{,}05; 50) = 2{,}00856.$$

Так как $|\Lambda| = 9{,}56822 > 2{,}00856 = t_{\text{кр}}(0{,}05; 50)$, то нулевую гипотезу отклоняем на уровне $\alpha = 0{,}05$, т. е. M и V коррелированы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Теория вероятностей и математическая статистика

161. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета — выигрыш по 50 руб., на десять билетов — выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов — выигрыш по 10 руб., на 165 билетов — выигрыш по 5 руб., на 400 билетов — выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 руб.?

162. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

163. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность — четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение — четырем.

164. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

165. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

166. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

167. В урне 9 белых и 1 черный шар. Вынули сразу три шара. Какова вероятность того, что все шары белые?

168. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд не произойдет ни одной неполадки?

169. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

170. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором — с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: 1) не меньше 7; 2) равна 11; 3) не больше 11?

171–180. Некоторая вакцина эффективна на a % в формировании иммунитета. Вакцинировали двух человек. Пусть A и B — события, состоящие в том, что соответственно первый и второй человек приобретает иммунитет. Найти вероятность того, что: а) оба человека приобрели иммунитет; б) первый приобрел иммунитет, а второй нет.

	Номер задания									
	171	**172**	**173**	**174**	**175**	**176**	**177**	**178**	**179**	**180**
a	75	73	71	69	67	95	93	91	89	87

181. В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10 % телевизоров с дефектом, второго — 5 % и третьего — 3 %. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25 % телевизоров с первого завода, 55 % — со второго и 20 % — с третьего?

182. Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй — три белых и пять черных. Из первой и второй урн не глядя берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары из третьей урны перемешиваются, и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белый.

183. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10 % — государственные органы, 20 % — другие банки, остальные — физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращен, составляют 0,01, 0,05 и 0,2 соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

184. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй — 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар — белый.

185. Имеется четыре урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шар, во второй — 2 белых и 3 черных, в третьей — 3 белых и 5 черных шаров, в четвертой — 4 белых и 7 черных шаров. Событие H_i — выбор i-й урны ($i = 1, 2, 3, 4$). Известно, что вероятность выбора i-й равна $i/10$. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

186. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

187. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на первом заводе, 20 деталей — на втором заводе и 18 деталей — на третьем заводе. Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом заводе, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на втором и третьем заводах, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

188. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

189. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

190. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как $3 : 2 : 5$. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

191–200. В специализированную больницу поступают в среднем k % больных с заболеванием K, l % — с заболеванием L, m % — с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

	Номер задания									
	191	**192**	**193**	**194**	**195**	**196**	**197**	**198**	**199**	**200**
k	51	52	53	54	55	56	55	54	53	51
l	31	32	33	34	35	34	30	40	38	37
m	18	16	14	12	10	10	14	6	9	12

201. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

202. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

203. В каждом из четырех ящиков по 5 белых и по 15 черных шаров. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность вынуть два белых и два черных шара?

204. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что 7 раз она упадет гербом вверх?

205. В урне 30 белых и 15 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

206. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более трех раз?

207. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 15 испытаниях событие A появится не более трех раз?

208. Монету подбрасывают 12 раз. Какова вероятность того, что 8 раз она упадет гербом вверх?

209. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 20 испытаниях событие A появится не более трех раз?

210. Вероятность появления события A равна 0,3. Какова вероятность того, что при 12 испытаниях событие A появится не более трех раз?

211. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в

243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

212. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

213. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

214. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что «решка» выпадет ровно N раз.

215. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз.

216. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз.

217. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не более 74 раз.

218. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 и не более 1500 раз.

219. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 раз.

220. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не более 1469 раз.

221–230. Непрерывная случайная величина X задана своей плотностью распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;

5) определить вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $[a, b]$.

221. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ Ax, 0<x\leqslant 1,\\ 0, x>1,\end{cases}\quad a=0,\ b=2.$

222. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ A\sin x, 0<x\leqslant \pi,\\ 0, x>\pi,\end{cases}\quad a=-1,\ b=\pi/2.$

223. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ A\cdot e^{x}, 0<x<1,\\ 0, x\geqslant 1,\end{cases}\quad a=0,\ b=1/2.$

224. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ A(x+1), 0<x\leqslant 2,\\ 0, x>2,\end{cases}\quad a=-1,\ b=1.$

225. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ A\cdot e^{-x}, 0<x<2,\\ 0, x\geqslant 1,\end{cases}\quad a=1,\ b=3.$

226. $f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ A\sin^2 x, 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, x>\pi,\end{cases}\quad a=\pi/2,\ b=2\cdot\pi.$

227. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{A^2+x^2}, 0<x<\dfrac{\pi}{4},\\ 0, x\geqslant \dfrac{\pi}{4},\end{cases}\quad a=0,\ b=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}.$

228. $f(x)=\begin{cases}0, x<-2,\\ \dfrac{A}{\sqrt{4-x^2}}, -2\leqslant x<2,\\ 0, x\geqslant 2,\end{cases}\quad a=\dfrac{\pi}{3},\ b=2.$

229. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant -\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{A}{1+x^2}, -\dfrac{\pi}{4}<x\leqslant \dfrac{\pi}{4},\\ 0, x>\dfrac{\pi}{4},\end{cases}\quad a=0,\ b=1.$

230. $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant \dfrac{\pi}{6},\\ A\sin 3x, \dfrac{\pi}{6}<x\leqslant \dfrac{\pi}{3},\\ 0, x>\dfrac{\pi}{3},\end{cases}\quad a=\dfrac{\pi}{4},\ b=\pi.$

231–240. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;

5) определить вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $[a,b]$.

231. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ A\sin 2x, 0<x\leqslant \dfrac{\pi}{4},\\ 1, x>\dfrac{\pi}{4},\end{cases}\quad a=\dfrac{\pi}{8},\ b=\dfrac{\pi}{6}.$

232. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant -1,\\ \dfrac{3x}{4}+A, -1<x\leqslant \dfrac{1}{3},\\ 1, x>\dfrac{1}{3},\end{cases}\quad a=0,\ b=\dfrac{1}{6}.$

233. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ \dfrac{Ax}{4}, 0<x\leqslant 4,\\ 1, x>4,\end{cases}\quad a=1,\ b=2.$

234. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ 1-A\cos x, 0<x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 1, x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}\quad a=\dfrac{\pi}{6},\ b=\dfrac{\pi}{4}.$

235. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant -1,\\ A(x+1)^2, -1<x\leqslant 0,\\ 1, x>0,\end{cases}\quad a=-\dfrac{1}{2},\ b=0.$

236. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 2,\\ A(x-2)^3, 2<x\leqslant 3,\\ 1, x>3,\end{cases}\quad a=\dfrac{5}{2},\ b=3.$

237. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 2\pi,\\ A\sin x, 2\pi<x\leqslant\dfrac{5\pi}{2},\\ 1, x>\dfrac{5\pi}{2},\end{cases}\quad a=2\pi,\ b=\dfrac{9\pi}{4}.$

238. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ A(e^x-1), 0<x\leqslant 1,\\ 1, x>1,\end{cases}\quad a=0,\ b=\dfrac{1}{2}.$

239. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ A(1-e^{-x}), 0<x\leqslant 1,\\ 1, x>1,\end{cases}\quad a=\dfrac{1}{2},\ b=1.$

240. $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant -1,\\ A(e^{x+1}-1), -1<x\leqslant 1,\\ 1, x>1,\end{cases}\quad a=-1,\ b=-\dfrac{1}{2}.$

241–250. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами: a (математическое ожидание) и σ (среднеквадратичное отклонение). Требуется:

1) написать плотность распределения вероятности и построить ее график;

2) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $[\alpha, \beta]$;

3) найти вероятность того, что случайная величина X отклонится (по модулю) от a не более, чем на δ;

4) применяя правило «трёх сигм», найти значения случайной величины X.

	Номер задания									
	241	**242**	**243**	**244**	**245**	**246**	**247**	**248**	**249**	**250**
a	7	5	6	4	3	2	8	9	10	1
σ	2	3	4	2	3	4	5	4	3	2
α	5	4	3	1	2	3	7	2	3	4
β	8	7	10	9	7	10	10	7	9	9
δ	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2

251–260. Для выяснения эффективности применения некоторого препарата исследовали некоторый показатель жизнедеятельности у животных двух групп. Среднее значение этого показателя для $n = 12$ животных опытной группы (т. е. той группы, в которой применялся препарат) составило $\overline{x}$ при исправленной выборочной дисперсии s_X^2. Для $m = 10$ животных контрольной группы соответствующие показатели оказались равными $\overline{y}$ и s_Y^2. В предположении справедливости нормального закона распределения изучаемого показателя у животных как опытной, так и контрольной групп при уровне значимости $p = 0{,}05$ определить:

1) значимо ли различаются найденные исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2 (при конкурирующей гипотезе, состоящей в утверждении о неравенстве соответствующих генеральных дисперсий);

2) значимо ли различаются между собой найденные средние значения изучаемого показателя для двух групп животных. Иными словами, позволяют ли проведенные исследования утверждать, что данный препарат действительно оказывает определенное воздействие на изучаемый показатель жизнедеятельности животных?

	Номер задания									
	251	**252**	**253**	**254**	**255**	**256**	**257**	**258**	**259**	**260**
$\overline{x}$	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8
s_X^2	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06
$\overline{y}$	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
s_Y^2	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,15	0,14	0,13	0,12

261–270. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости $p = 0{,}05$ проверить эффективность воздействия двух факторов — температуры (фактор A) в °С и фермента (фактор B) в условных единицах (усл. ед.) на выход продукта биохимического синтеза по результатам экспериментов, приведенным в таблице.

261.

$A \backslash B$	44	52	67
27	102	95	87
31	95	88	77
32	87	88	73

262.

$A \backslash B$	44	52	67
27	100	90	85
31	93	87	75
32	85	87	72

263.

$A \backslash B$	44	52	67
27	90	89	84
31	91	84	72
32	82	83	70

264.

A \ B	44	52	67
27	95	88	83
31	90	83	70
32	80	81	69

265.

A \ B	44	52	67
27	94	86	80
31	88	80	70
32	80	78	68

266.

A \ B	44	52	67
27	93	85	78
31	85	78	68
32	79	76	67

267.

A \ B	44	52	67
27	91	83	76
31	83	75	65
32	77	73	70

268.

A \ B	44	52	67
27	89	80	74
31	81	73	62
32	73	71	69

269.

A \ B	44	52	67
27	87	78	72
31	80	70	61
32	72	69	67

270.

A \ B	44	52	67
27	85	76	71
31	78	69	60
32	70	68	60

271–280. Изучалась зависимость массы M, кг животных от объема их тела V, дм^3. Результаты наблюдений приведены в виде корреляционной таблицы (пропуски означают нули). Требуется:

1) вычислить выборочный коэффициент корреляции M и V;

2) написать уравнение линейной регрессии M на V;

3) написать выборочное уравнение прямой среднеквадратичной регрессии M на V;

4) вычислить значения в точках V_i выборочной функции регрессии M на V;

5) при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о некоррелированности массы животных и объема их тела.

271.

M \ V	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
5,0	4	3			
5,2	2	4	6		
5,4		4	5	4	
5,8			4	6	4
6,0				3	3

272.

M \ V	4,1	4,2	4,3	4,6	4,7
5,0	4	3			
5,1	3	5	7		
5,3		4	3	4	
5,7			5	6	4
5,9				4	3

273.

M \ V	4,0	4,3	4,4	4,5	4,8
4,9	3	3			
5,1	3	4	6		
5,2		5	6	4	
5,4			4	7	4
5,6				3	4

274.

M \ V	4,0	4,1	4,2	4,7	4,8
5,0	4	4			
5,3	4	4	7		
5,4		6	4	3	
5,5			3	5	4
5,6				3	3

275.

M \ V	4,2	4,4	4,7	4,8	5,0
5,2	4	3			
5,5	5	5	5		
5,7		5	6	5	
6,0			7	7	4
6,2				3	5

276.

M \ V	4,3	4,4	4,9	5,0	5,4
5,3	4	4			
5,5	3	7	7		
5,8		7	5	6	
6,2			8	8	4
6,5				4	3

277.

M \ V	4,3	4,5	4,7	5,0	5,2
5,3	1	5			
5,5	3	4	4		
5,8		3	3	4	
6,0			7	8	7
6,2				3	10

278.

M \ V	4,0	4,1	4,3	4,5	4,7
5,4	3	4			
5,7	2	7	5		
6,0		4	7	5	
6,5			9	8	8
6,7				4	6

279.

M \ V	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
5,5	4	8			
5,7	7	8	7		
5,8		9	8	7	
5,9			6	7	9
6,3				8	10

280.

M \ V	4,5	4,7	4,9	5,1	5,3
5,7	5	9			
5,9	7	8	8		
6,1		10	9	7	
6,3			7	7	9
6,5				9	10

Вопросы для подготовки к экзамену по математике

1. Производная функции. Механический и геометрический смысл производной.

2. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования. Производная сложной функции.

3. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.

4. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной.

5. Необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции на интервале.

6. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции.

7. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл.

8. Таблица и свойства неопределенных интегралов.

9. Простейшие способы интегрирования. Понятие определенного интеграла. Геометрическая интерпретация.

10. Свойства определенного интеграла.

11. Вычисление среднего значения функции на отрезке.

12. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.

13. Основные приложения определенного интеграла.

14. Функция двух переменных. Частные и полное приращения функции двух переменных.

15. Частные производные функции двух переменных. Дифференциал.

16. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Порядок уравнения. Общее и частные решения дифференциального уравнения.

17. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

18. Составление и решение дифференциальных уравнений в задачах по физике, химии, биологии.

19. Случайные события и их классификация.

20. Классическое определение вероятности события.

21. Статистическое определение вероятности.

22. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

23. Теорема умножения вероятностей для независимых событий.

24. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий.

25. Повторные испытания. Формула Бернулли.

26. Повторные испытания. Формула Пуассона.

27. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.

28. Закон распределения дискретной случайной величины.

29. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

30. Функция распределения дискретной случайной величины, ее свойства и график.

31. Функция распределения непрерывной случайной величины, ее свойства и график.

32. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Свойства плотности распределения.

33. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

34. Нормальный закон распределения. Влияние математического ожидания и среднего квадратичного отклонения на форму кривой Гаусса.

35. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

36. Нормальный закон распределения. Доверительный интервал и правило «трех сигм».

37. Генеральная и выборочная совокупности. Понятие репрезентативности выборки.

38. Статистический дискретный ряд распределения. Полигон.

39. Интервальный ряд распределения. Гистограмма.

40. Оценки числовых характеристик генеральной совокупности по опытным данным. Выборочная средняя, выборочная и исправленная выборочная дисперсии.

41. Доверительный интервал, доверительная вероятность.

42. Расчет доверительного интервала для математического ожидания. Распределение Стьюдента.

43. Погрешности измерения. Виды погрешностей.

44. Статистическая обработка результатов прямых измерений.

45. Оценка истинного значения косвенно измеряемой величины.

46. Метод наименьших квадратов и его основная идея.

47. Статистическая, корреляционная и функциональная зависимости между случайными величинами.

48. Корреляционная зависимость. Линии регрессии. Линейная корреляционная зависимость между случайными величинами. Уравнения линейной регрессии.

49. Коэффициент линейной корреляции и его основные свойства.

50. Проверка существенности линейной корреляционной зависимости между случайными величинами.

51. Проверка статистической гипотезы о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей. Критерии различия.

52. Проверка статистической гипотезы о равенстве генеральных дисперсий двух нормальных совокупностей. Критерии различия.

53. Метод однофакторного дисперсионного анализа. Факторная и остаточная дисперсии.

54. Временные ряды. Тренд. Составление линейного уравнения тренда с помощью метода наименьших квадратов.

55. Сглаживание временных рядов методом скользящего среднего.

Контрольные вопросы к практическим занятиям по математике

1. Понятие предела. Основные теоремы о пределах.

2. Вычисление простейших пределов, устранение неопределенностей.

3. Определение производной функции в точке.

4. Физический и геометрический смысл производной.

5. Общее правило нахождения производной.

6. Основные теоремы о нахождении производной.

7. Таблица производных основных функций.

8. Нахождение производной сложной функции.

9. Нахождение производной второго порядка.

10. Механический смысл второй производной.

11. Нахождение производных высших порядков.

12. Теорема о признаках возрастания и убывания функции.

13. Понятие о точках экстремума. Определения точек максимума и минимума функции.

14. Понятие о критических и стационарных точках функции.

15. Условие существования экстремума дифференцируемой функции в точке.

16. Определение промежутков возрастания и убывания и экстремумов функции с помощью производной.

17. Понятие функции нескольких переменных. Функция двух переменных и область её определения.

18. Полное и частные приращения функции двух переменных.

19. Определения частных производных для функции нескольких переменных.

20. Правила и формулы для нахождения частных производных функции нескольких переменных.

21. Полный и частные дифференциалы функции нескольких переменных.

22. Первообразная функция и неопределенный интеграл.

23. Основные свойства неопределенного интеграла.

24. Таблица неопределенных интегралов.

25. Непосредственное интегрирование методом разложения.

26. Проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

27. Понятие определенного интеграла. Основные определения.

28. Геометрическая интерпретация определенного интеграла.

29. Основные свойства определенного интеграла.

30. Формула Ньютона — Лейбница.

31. Основные методы вычисления определенных интегралов.

32. Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных линиями графиков.

33. Вычисление работы переменной силы по перемещению материальной точки.

34. Определение пути движения точки по известной переменной скорости.

35. Понятие дифференциальных уравнений.

36. Общее и частное решения дифференциальных уравнений.

37. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

38. Определение уравнения движения тела и пройденного пути по его скорости.

39. Модель одноразового внутривенного введения лекарственного препарата.

40. Модель непрерывного внутривенного введения лекарственного препарата.

41. Модель одноразового внесосудистого введения лекарственного препарата.

42. Модель многократного внесосудистого введения лекарственного препарата.

43. Случайные события и их классификация.

44. Классическое определение вероятности события.

45. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

46. Теорема умножения вероятностей для независимых событий.

47. Повторные испытания. Формула Бернулли.

48. Повторные испытания. Формула Пуассона.

49. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.

50. Закон распределения дискретной случайной величины.

51. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

52. Функция распределения дискретной случайной величины, ее свойства и график.

53. Функция распределения непрерывной случайной величины, ее свойства и график.

54. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Свойства плотности распределения.

55. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

56. Нормальный закон распределения. Влияние математического ожидания и среднего квадратического отклонения на форму кривой Гаусса.

57. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.

П р и л о ж е н и е

Воронежский государственный университет

Контрольная работа по математике

Вариант № 0

Выполнил студент 1 курса заочного отделения фармацевтического факультета
Группа 180
Фамилия, имя, отчество

Зачётная книжка №

Проверил преподаватель

Оценка

Подпись преподавателя

Дата проверки

Воронеж — 2009

Таблица А

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09893	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03548	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457
3,0	0,00443	0,00430	0,00417	0,00405	0,00393	0,00381	0,00370	0,00358	0,00348	0,00337
3,1	0,00327	0,00317	0,00307	0,00298	0,00288	0,00279	0,00271	0,00262	0,00254	0,00246
3,2	0,00238	0,00231	0,00224	0,00216	0,00210	0,00203	0,00196	0,00190	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00127
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100	0,00097	0,00094	0,00090
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00014	0,00014
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009
4,1	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006
4,2	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Таблица Б

Значения функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00398	0,00797	0,01196	0,01595	0,01993	0,02392	0,02790	0,03188	0,03585
0,1	0,03982	0,04379	0,04775	0,05172	0,05567	0,05961	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10257	0,11026	0,11026
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40148
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998
4,1	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49999	0,49999
4,2	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,3	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999

Продолжение табл. Б

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
4,4	0,4999945875	4,5	0,4999966023	4,6	0,4999978875
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
4,7	0,4999986992	4,8	0,4999992067	4,9	0,4999995208
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
5,0	0,4999997133	5,1	0,4999998302	5,2	0,4999999004
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
5,3	0,4999999421	5,4	0,4999999667	5,5	0,4999999810
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
5,6	0,4999999893	5,7	0,4999999940	5,8	0,4999999967
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
5,9	0,4999999982	6,0	0,4999999990	6,1	0,4999999995
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
6,2	0,4999999997	6,3	0,4999999999	6,4	0,4999999999
при $x \geqslant 6{,}5$ функция $\Phi(x)$ равна 0,5					

Таблица В

Значения $t_{n;p}$, соответствующие вероятности $p = P(|T_n| > t_{n;p})$

n \ p	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,01571	0,03929	0,07870	0,15838	6,31375	12,70615	25,45188	63,65590
2	0,01414	0,03537	0,07080	0,14213	2,91999	4,30266	6,20537	9,92499
3	0,01360	0,03402	0,06809	0,13660	2,35336	3,18245	4,17655	5,84085
4	0,01333	0,03334	0,06673	0,13383	2,13185	2,77645	3,49541	4,60408
5	0,01317	0,03294	0,06591	0,13218	2,01505	2,57058	3,16339	4,03212
6	0,01306	0,03267	0,06537	0,13108	1,94318	2,44691	2,96868	3,70743
7	0,01299	0,03247	0,06499	0,13029	1,89458	2,36462	2,84124	3,49948
8	0,01293	0,03233	0,06470	0,12971	1,85955	2,30601	2,75153	3,35538
9	0,01289	0,03222	0,06448	0,12925	1,83311	2,26216	2,68501	3,24984
10	0,01285	0,03213	0,06430	0,12889	1,81246	2,22814	2,63377	3,16926
11	0,01282	0,03206	0,06415	0,12859	1,79588	2,20099	2,59310	3,10582
12	0,01280	0,03200	0,06403	0,12835	1,78229	2,17881	2,56003	3,05454
13	0,01278	0,03195	0,06393	0,12814	1,77093	2,16037	2,53263	3,01228
14	0,01276	0,03190	0,06384	0,12796	1,76131	2,14479	2,50957	2,97685
15	0,01274	0,03186	0,06376	0,12781	1,75305	2,13145	2,48988	2,94673
16	0,01273	0,03183	0,06370	0,12767	1,74588	2,11990	2,47288	2,92079
17	0,01272	0,03180	0,06364	0,12755	1,73961	2,10982	2,45805	2,89823
18	0,01271	0,03178	0,06359	0,12745	1,73406	2,10092	2,44500	2,87844
19	0,01270	0,03175	0,06354	0,12735	1,72913	2,09302	2,43344	2,86094
20	0,01269	0,03173	0,06350	0,12727	1,72472	2,08596	2,42311	2,84534
21	0,01268	0,03171	0,06346	0,12719	1,72074	2,07961	2,41384	2,83137
22	0,01268	0,03170	0,06343	0,12712	1,71714	2,07388	2,40547	2,81876
23	0,01267	0,03168	0,06339	0,12706	1,71387	2,06865	2,39787	2,80734
24	0,01266	0,03167	0,06337	0,12700	1,71088	2,06390	2,39095	2,79695
25	0,01266	0,03165	0,06334	0,12694	1,70814	2,05954	2,38461	2,78744
26	0,01265	0,03164	0,06332	0,12689	1,70562	2,05553	2,37878	2,77872
27	0,01265	0,03163	0,06329	0,12685	1,70329	2,05183	2,37342	2,77068
28	0,01265	0,03162	0,06327	0,12681	1,70113	2,04841	2,36845	2,76326

Продолжение табл. В

n \ p	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
29	0,01264	0,03161	0,06325	0,12677	1,69913	2,04523	2,36385	2,75639
30	0,01264	0,03160	0,06323	0,12673	1,69726	2,04227	2,35957	2,74998
31	0,01264	0,03159	0,06322	0,12669	1,69552	2,03951	2,35557	2,74404
32	0,01263	0,03158	0,06320	0,12666	1,69389	2,03693	2,35184	2,73849
33	0,01263	0,03158	0,06319	0,12663	1,69236	2,03452	2,34833	2,73329
34	0,01263	0,03157	0,06317	0,12660	1,69092	2,03224	2,34506	2,72839
35	0,01262	0,03156	0,06316	0,12658	1,68957	2,03011	2,34197	2,72381
36	0,01262	0,03156	0,06315	0,12655	1,68830	2,02809	2,33906	2,71948
37	0,01262	0,03155	0,06313	0,12653	1,68709	2,02619	2,33632	2,71541
38	0,01262	0,03154	0,06312	0,12650	1,68595	2,02439	2,33372	2,71157
39	0,01261	0,03154	0,06311	0,12648	1,68488	2,02269	2,33126	2,70791
40	0,01261	0,03153	0,06310	0,12646	1,68385	2,02107	2,32893	2,70446
41	0,01261	0,03153	0,06309	0,12644	1,68288	2,01954	2,32672	2,70118
42	0,01261	0,03153	0,06308	0,12642	1,68195	2,01808	2,32462	2,69807
43	0,01261	0,03152	0,06307	0,12641	1,68107	2,01669	2,32262	2,69511
44	0,01261	0,03152	0,06307	0,12639	1,68023	2,01537	2,32071	2,69229
45	0,01260	0,03151	0,06306	0,12637	1,67943	2,01410	2,31889	2,68959
46	0,01260	0,03151	0,06305	0,12636	1,67866	2,01289	2,31716	2,68701
47	0,01260	0,03150	0,06304	0,12634	1,67793	2,01174	2,31549	2,68456
48	0,01260	0,03150	0,06304	0,12633	1,67722	2,01063	2,31390	2,68221
49	0,01260	0,03150	0,06303	0,12631	1,67655	2,00957	2,31237	2,67995
50	0,01260	0,03150	0,06302	0,12630	1,67591	2,00856	2,31092	2,67779
55	0,01259	0,03148	0,06299	0,12624	1,67303	2,00404	2,30442	2,66822
60	0,01259	0,03147	0,06297	0,12619	1,67065	2,00030	2,29905	2,66027
65	0,01258	0,03146	0,06295	0,12615	1,66864	1,99714	2,29451	2,65361
70	0,01258	0,03145	0,06293	0,12612	1,66692	1,99444	2,29064	2,64790
75	0,01258	0,03144	0,06292	0,12609	1,66543	1,99210	2,28729	2,64299
80	0,01257	0,03144	0,06290	0,12606	1,66413	1,99007	2,28437	2,63870
85	0,01257	0,03143	0,06289	0,12604	1,66298	1,98827	2,28180	2,63492
90	0,01257	0,03143	0,06288	0,12602	1,66196	1,98667	2,27952	2,63157
95	0,01257	0,03142	0,06287	0,12600	1,66105	1,98525	2,27748	2,62859
100	0,01256	0,03142	0,06286	0,12598	1,66023	1,98397	2,27566	2,62589
105	0,01256	0,03141	0,06286	0,12597	1,65950	1,98282	2,27400	2,62346
110	0,01256	0,03141	0,06285	0,12595	1,65882	1,98177	2,27250	2,62127
115	0,01256	0,03141	0,06284	0,12594	1,65821	1,98081	2,27113	2,61925
120	0,01256	0,03140	0,06284	0,12593	1,65765	1,97993	2,26987	2,61742
125	0,01256	0,03140	0,06283	0,12592	1,65714	1,97912	2,26873	2,61574
130	0,01256	0,03140	0,06283	0,12591	1,65666	1,97838	2,26766	2,61418
135	0,01256	0,03140	0,06282	0,12590	1,65622	1,97769	2,26668	2,61274
140	0,01256	0,03139	0,06282	0,12589	1,65581	1,97706	2,26577	2,61140
145	0,01256	0,03139	0,06282	0,12588	1,65543	1,97646	2,26491	2,61016
150	0,01255	0,03139	0,06281	0,12587	1,65508	1,97590	2,26412	2,60901
160	0,01255	0,03139	0,06281	0,12586	1,65443	1,97490	2,26270	2,60690
170	0,01255	0,03138	0,06280	0,12585	1,65387	1,97402	2,26143	2,60507
180	0,01255	0,03138	0,06279	0,12584	1,65336	1,97323	2,26030	2,60341
190	0,01255	0,03138	0,06279	0,12583	1,65291	1,97253	2,25930	2,60196
200	0,01255	0,03138	0,06279	0,12582	1,65251	1,97189	2,25840	2,60063

Таблица Г

Значения F_p, соответствующие вероятности
$p = P(F(n_1, n_2) > F_p)$ при $p = 0{,}05$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	7	10	20
1	161,44622	199,49948	215,70668	224,58335	230,16037	236,76694	241,88193	248,01557
2	18,51276	19,00003	19,16419	19,24673	19,29629	19,35314	19,39588	19,44568
3	10,12796	9,55208	9,27662	9,11717	9,01343	8,88673	8,78549	8,66021
4	7,70865	6,94428	6,59139	6,38823	6,25607	6,09421	5,96435	5,80255
5	6,60788	5,78615	5,40945	5,19216	5,05034	4,87586	4,73506	4,55813
6	5,98737	5,14325	4,75706	4,53369	4,38737	4,20667	4,05996	3,87419
7	5,59146	4,73742	4,34683	4,12031	3,97152	3,78705	3,63653	3,44453
8	5,31764	4,45897	4,06618	3,83785	3,68750	3,50046	3,34717	3,15032
9	5,11736	4,25649	3,86254	3,63309	3,48166	3,29274	3,13727	2,93646
10	4,96459	4,10282	3,70827	3,47805	3,32584	3,13547	2,97824	2,77402
11	4,84434	3,98231	3,58743	3,35669	3,20388	3,01233	2,85362	2,64644
12	4,74722	3,88529	3,49030	3,25916	3,10587	2,91335	2,75339	2,54359
13	4,66719	3,80557	3,41053	3,17912	3,02543	2,83210	2,67102	2,45888
14	4,60011	3,73889	3,34389	3,11225	2,95825	2,76420	2,60216	2,38789
15	4,54307	3,68232	3,28738	3,05557	2,90130	2,70663	2,54371	2,32753
16	4,49400	3,63372	3,23887	3,00692	2,85241	2,65720	2,49351	2,27557
17	4,45132	3,59154	3,19677	2,96471	2,81000	2,61430	2,44992	2,23035
18	4,41386	3,55456	3,15991	2,92775	2,77285	2,57672	2,41170	2,19065
19	4,38075	3,52189	3,12735	2,89511	2,74006	2,54354	2,37793	2,15550
20	4,35125	3,49283	3,09839	2,86608	2,71089	2,51401	2,34787	2,12415
21	4,32479	3,46679	3,07247	2,84010	2,68478	2,48758	2,32095	2,09603
22	4,30094	3,44336	3,04912	2,81671	2,66127	2,46377	2,29669	2,07066
23	4,27934	3,42213	3,02800	2,79554	2,64000	2,44223	2,27472	2,04764
24	4,25968	3,40283	3,00879	2,77629	2,62065	2,42263	2,25474	2,02666
25	4,24170	3,38520	2,99124	2,75871	2,60299	2,40473	2,23648	2,00747
26	4,22520	3,36901	2,97516	2,74260	2,58679	2,38831	2,21972	1,98984
27	4,21001	3,35413	2,96035	2,72777	2,57189	2,37321	2,20430	1,97359
28	4,19598	3,34039	2,94668	2,71407	2,55812	2,35926	2,19004	1,95856
29	4,18297	3,32766	2,93403	2,70140	2,54538	2,34634	2,17685	1,94462
30	4,17089	3,31583	2,92228	2,68963	2,53355	2,33435	2,16458	1,93165
31	4,15962	3,30482	2,91134	2,67867	2,52254	2,32317	2,15316	1,91956
32	4,14909	3,29453	2,90112	2,66844	2,51225	2,31274	2,14249	1,90826
33	4,13925	3,28492	2,89157	2,65887	2,50263	2,30298	2,13250	1,89767
34	4,13002	3,27590	2,88260	2,64990	2,49361	2,29383	2,12314	1,88773
35	4,12135	3,26742	2,87419	2,64146	2,48514	2,28523	2,11434	1,87838
36	4,11316	3,25944	2,86627	2,63353	2,47717	2,27714	2,10606	1,86956
37	4,10546	3,25193	2,85880	2,62605	2,46965	2,26951	2,09824	1,86124
38	4,09817	3,24482	2,85174	2,61899	2,46255	2,26230	2,09086	1,85338
39	4,09128	3,23810	2,84507	2,61230	2,45583	2,25548	2,08387	1,84593
40	4,08474	3,23173	2,83875	2,60597	2,44947	2,24902	2,07725	1,83886
41	4,07854	3,22568	2,83275	2,59997	2,44343	2,24289	2,07097	1,83215
42	4,07266	3,21994	2,82705	2,59426	2,43769	2,23707	2,06499	1,82577
43	4,06705	3,21448	2,82163	2,58883	2,43224	2,23153	2,05931	1,81969
44	4,06170	3,20928	2,81646	2,58367	2,42704	2,22625	2,05390	1,81390

Продолжение табл. Г

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	7	10	20
45	4,05660	3,20432	2,81155	2,57874	2,42208	2,22122	2,04874	1,80837
46	4,05174	3,19959	2,80684	2,57403	2,41736	2,21642	2,04381	1,80309
47	4,04711	3,19505	2,80235	2,56954	2,41284	2,21183	2,03910	1,79804
48	4,04265	3,19072	2,79806	2,56524	2,40851	2,20744	2,03460	1,79320
49	4,03838	3,18659	2,79395	2,56112	2,40438	2,20323	2,03028	1,78857
50	4,03432	3,18261	2,79001	2,55718	2,40041	2,19920	2,02614	1,78412
55	4,01619	3,16500	2,77254	2,53969	2,38283	2,18133	2,00779	1,76438
60	4,00119	3,15041	2,75808	2,52521	2,36827	2,16654	1,99259	1,74798
65	3,98856	3,13814	2,74591	2,51304	2,35602	2,15410	1,97980	1,73415
70	3,97779	3,12768	2,73554	2,50266	2,34559	2,14348	1,96887	1,72232
75	3,96847	3,11864	2,72659	2,49369	2,33658	2,13431	1,95945	1,71210
80	3,96035	3,11077	2,71879	2,48588	2,32872	2,12632	1,95122	1,70316
85	3,95320	3,10384	2,71192	2,47901	2,32181	2,11930	1,94398	1,69529
90	3,94687	3,09770	2,70584	2,47293	2,31569	2,11307	1,93756	1,68830
95	3,94122	3,09222	2,70041	2,46749	2,31022	2,10751	1,93184	1,68205
100	3,93615	3,08729	2,69554	2,46261	2,30532	2,10251	1,92669	1,67643
105	3,93155	3,08285	2,69113	2,45821	2,30089	2,09801	1,92205	1,67136
110	3,92740	3,07882	2,68714	2,45421	2,29687	2,09391	1,91783	1,66674
115	3,92359	3,07514	2,68350	2,45057	2,29321	2,09018	1,91398	1,66253
120	3,92012	3,07178	2,68017	2,44724	2,28985	2,08677	1,91046	1,65868
125	3,91694	3,06869	2,67710	2,44417	2,28677	2,08363	1,90722	1,65513
130	3,91398	3,06584	2,67428	2,44135	2,28393	2,08074	1,90424	1,65186
135	3,91127	3,06321	2,67168	2,43874	2,28130	2,07807	1,90148	1,64884
140	3,90874	3,06076	2,66925	2,43632	2,27887	2,07559	1,89893	1,64603
145	3,90639	3,05849	2,66701	2,43406	2,27660	2,07328	1,89655	1,64341
150	3,90420	3,05637	2,66490	2,43197	2,27449	2,07113	1,89432	1,64097
160	3,90023	3,05253	2,66111	2,42817	2,27067	2,06724	1,89031	1,63655
170	3,89674	3,04915	2,65776	2,42481	2,26730	2,06381	1,88676	1,63265
180	3,89363	3,04615	2,65479	2,42184	2,26431	2,06076	1,88362	1,62919
190	3,89088	3,04347	2,65214	2,41918	2,26164	2,05804	1,88081	1,62609
200	3,88837	3,04105	2,64976	2,41680	2,25923	2,05559	1,87828	1,62331
∞	3,84145	2,99573	2,60491	2,37193	2,21410	2,00959	1,83071	1,57052

Номера заданий по вариантам

Контрольная работа № 1

Вариант	Номер задания															
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112	122	132	142	152
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103	113	123	133	143	153
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104	114	124	134	144	154
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145	155
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106	116	126	136	146	156
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	157
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108	118	128	138	148	158
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109	119	129	139	149	159
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160

Контрольная работа № 2

Вариант	Номер задания											
1	161	171	181	191	201	211	221	231	241	251	261	271
2	162	172	182	192	202	212	222	232	242	252	262	272
3	163	173	183	193	203	213	223	233	243	253	263	273
4	164	174	184	194	204	214	224	234	244	254	264	274
5	165	175	185	195	205	215	225	235	245	255	265	275
6	166	176	186	196	206	216	226	236	246	256	266	276
7	167	177	187	197	207	217	227	237	247	257	267	277
8	168	178	188	198	208	218	228	238	248	258	268	278
9	169	179	189	199	209	219	229	239	249	259	269	279
10	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФАРМАЦЕВТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА»

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Зверева Маргарита Борисовна,
Найдюк Филипп Олегович,
Шабров Сергей Александрович

Редактор А.Ю. Котлярова

Подписано в печать 30.04.2009. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 4,2.
Тираж 150 экз. Заказ 741.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. 208-298, 598-026 (факс)
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 204-133